

CEDEC2007

(CESA DEVELOPERS CONFERENCE 2007)

流体力学のゲーム応用(その3)

2007年9月27日

株式会社バンダイナムコゲームス

社長室

馬場 哲治

目次(1 / 2)

1. セミナーの背景
2. ゲーム技術の鍵
3. 流体力学って何?
4. 流体力学の分類
5. ゲームに応用できる流体力学
 - 2次元完全流体(複素ポテンシャル論)
 - 2次元完全流体(複素写像関数)
 - 2次元完全流体(有限要素法)
 - 3次元完全流体(Biot-Savartの定理)
 - 2次元粘性流体(N·S方程式)
 - 3次元粘性流体(N·S方程式)
 - 海洋波
 - 複合現象(流体、混合、燃焼)



CEDEC2005
CEDEC2006
で講演

目次(2 / 2)

5. ゲームに適用できる流体力学(続き)

自由表面の波

2次元の水面波

船の操縦運動

波浪中の船の3次元運動



CEDEC2007
で講演

セミナーの背景

ゲームの歴史は、新しい技術の導入の歴史
新しい技術で、新しい「遊び」を提案
ゲームメーカーならではのオリジナリティのある
技術でゲーム産業を活性化
ゲームの対象は森羅万象。他分野の技術
(理学、工学、心理学、医学、etc)を積極的に
学び、活かすスキルが求められている
流体力学を使う物理エンジンの出現
(中身を知れば、応用も可能)

ゲーム技術の鍵

高速性

ゲームの基本はインタラクティブ性

非リアルタイム・ゲームでもスピードは重要

物理シミュレーションといえど、リアルタイム
処理できなければ、使い物にならない

シンプルな操作性

プレイヤーがゲームに集中できるように、

シンプルかつ分かり易い入力操作

物理シミュレーションであれば、少ないパラ
メータで表現、コントロールも可能

流体力学って何？ (1 / 2)

数学から見ると(超難問！)

- ・ 歴史上の物理数学者 (Bernoulli, Lagrange, Euler, Helmholtz, Navier, Stokes, ...) は、流体力学を発展させたが、あの高名な流体方程式 (Navier・Stokes方程式) は世界十大難問のひとつ
米国クレイ数学研究所が100万ドルの懸賞金提供も

物理学から見ると(自然現象の理解！)

- ・ 連続物体(水流、渦、波、台風、...)の移動現象 (質量、運動量、エネルギー)を取り扱う力学だが、現象ごとの物理の理解が求められる

流体力学って何？ (2 / 2)

流体力学(移動現象)表す式は、こんな式

	保存方程式	速度方程式	変化の式
物質 (全体)	連続の式 $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v})$ $\rho = \text{const}$ のとき $(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$		
運動量	$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$	$\boldsymbol{\tau} = -\mu [(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^T]$ $+ \left(\frac{2}{3}\mu - \varphi\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\delta}$	Navier-Stokes の式 $\rho = \text{const}$ のとき $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g}$
エネルギー	$\rho \hat{C}_v \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q})$ $- T \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{\hat{v}} (\nabla \cdot \mathbf{v})$ $+ \mu \Phi_v$	$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$	$\rho, \kappa = \text{const}, \hat{C}_v = \hat{C}_p = \text{const}$ $\Phi_v = 0$ のとき $\frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \quad (\alpha = \kappa / \rho \hat{C}_p)$
物質 (各成分)	$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{J}_A) = r_A$ $\frac{\partial C_A}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{N}_A) = R_A$	$\mathbf{J}_{AM} = \mathbf{J}_A - \omega_A (\mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B)$ $= -\rho \mathcal{D}_{AB} \nabla \omega_A$ $\mathbf{N}_{AN} = \mathbf{N}_A - x_A (\mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B)$ $= -C \mathcal{D}_{AB} \nabla x_A$	$\rho, \mathcal{D}_{AB} = \text{const}$ $\frac{D\rho_A}{Dt} = \mathcal{D}_{AB} \nabla^2 \rho_A + r_A$ あるいは $\frac{DC_A}{Dt} = \mathcal{D}_{AB} \nabla^2 C_A + R_A$

平岡、田中著「移動現象論」朝倉書店より

もっと簡単な式で流体を表現したい！
(このセミナーの目的？)

流体力学の分類 (1 / 3)

2次元流体 (軸対称流体も含む) 3次元流体

2次元流体をうまく見せれば、3次元流体にも見える

3次元流体は、計算コストが高い

非粘性流体 (完全流体) 粘性流体

非粘性流体 (完全流体) でも流体らしく表現可能

粘性現象は局部的 (壁近傍など)、大局的には非粘性

定常流体 非定常流体

非定常流体は、計算コストが高い

定常流体をうまく処理すれば非定常流体に見える

(ゲームのインタラクティブ性表現には必須?)

非圧縮性流体 圧縮性流体

航空力学は非圧縮流体が対象、ゲームはこれから?

流体力学の分類 (2 / 3)

ニュートン流体(水) 非ニュートン流体(血液、溶岩)

非ニュートン流体の流体力学は未解明

層流(乱れの無い流れ) 乱流(乱れ、不安定な流れ)

Navier・Stokes方程式では乱流現象を表現できない
(Reynolds応力がN・S方程式に追加)

単体現象(流体) 複合現象(流体、混合、燃焼)

複合現象(流体、混合、燃焼)は、計算コストが高い
パーティクル・システムの応用もある

自由界面なし(内部流体) 自由界面あり(波)

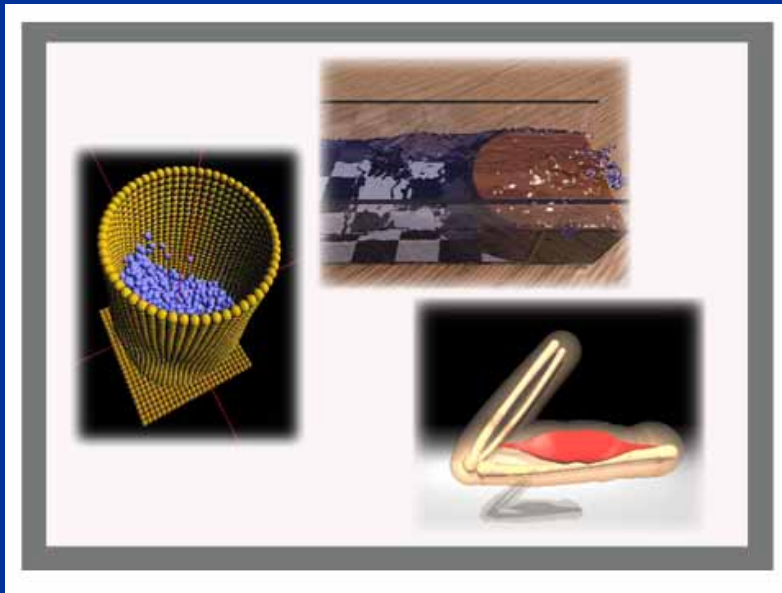
波の変形(砕波、屈折、回折)は海岸工学

造波(Radiation / Diffraction)は船舶海洋工学

流体力学の分類(3 / 3)

連続流体 不連続流体

特殊流体問題(砕波、越波、雪崩)は、
従来の解法(ポテンシャル論、差分法、有限要素法)で
は解けない。新しい解法(粒子法、...)の出現



粒子法(東大越塚研究室のHPより)
<http://mps.q.t.u-tokyo.ac.jp/>

ゲームに応用できる流体力学(1 / 2)

2次元完全流体(複素ポテンシャル論)

- ・ 揺動回転円柱の流れ場(PC実演)
- ・ 壁と円柱に沿った複数渦の流れ場(PC実演)

2次元完全流体(複素写像変換)

- ・ Joukowski変換による翼の流れ場(PC実演)
- ・ 拡張Lewis Form変換による円柱の流れ場(PC実演)

2次元完全流体(有限要素法)

- ・ 循環流(PC実演)

3次元完全流体(Biot-Savartの定理)

- ・ Vortex Ring【空気砲】(PC実演)



CEDEC2005
CEDEC2006
で講演

ゲームに応用できる流体力学(2 / 2)

2次元粘性流体 (Navier・Stokes方程式)

- ・ ゲーム (SwiQ) (ビデオ上映)
- ・ ゲーム (JetFinger) (ビデオ上映)

3次元粘性流体 (Navier・Stokes方程式)

- ・ 竜巻のシミュレーション (PC実演)

海洋波

- ・ 短波頂不規則波のシミュレーション
ISSC (International Ship Structure Congress)
波スペクトラル (PC実演)

複合現象 (流体、混合、燃焼)

- ・ 炎と流体映像制作ソフト (PC実演)

CEDEC2005
CEDEC2006
で講演

ゲームに応用できる流体力学(2 / 2)

自由表面の波

- ・ 簡易計算法による波 (Heightfield Approximation)
- ・ 解析手法による波
- ・ 数値計算法による波
- ・ 統計手法による波 (PC実演)

2次元の水面波

- ・ コーシーポアソン (Cauchy Poisson) 波
- ・ ケルビン (Kelvin) 波 (PC実演)
- ・ 自由旋回する船がつくる波 (PC実演)

船の操縦運動

- ・ 船の操縦運動 (PC実演)

波浪中の船の3次元運動

- ・ 波浪中の船の3次元運動 (PC実演)

CEDEC2007
で講演

自由表面の波

1 - 1) 簡易計算法による波 (Heightfield Approximation)

(特徴) 自由表面を高さ (水深) のみで表現

- 任意の点: $P_i(X_i, Y_i)$ の高さ: $Z_i = Z(X_i, Y_i)$ の上下変化: $Z_i(X_i, Y_i)$ を、周囲との高さの差の平均値: $(Z_i - Z_j) / N$ で表現
- 流体速度などを無視しているので計算が高速で安定
- PS3のゲームタイトルに採用
「ぽちゃぽちゃあひるちゃん」



自由表面の波

1 - 2) 簡易計算法による波 (Heightfield Approximation) (SIGGRAPH2007 Course「Fluid Simulation」にあるプログラム)

```
forall i, j do u[i, j] = u0[i, j]; v[i, j] = 0;
loop
forall i, j do v[i, j] += (u[i-1, j] + u[i+1, j] + u[i, j-1] + u[i, j+1])/4
                    - u[i, j];
forall i, j do v[i, j] *= 0.99;
forall i, j do u[i, j] += v[i, j];
endloop
```

《境界条件》

$$\begin{aligned} u[-1, j] &= u[0, j], \\ u[N, j] &= u[N-1, j], \\ u[i, -1] &= u[i, 0], \\ u[i, M] &= u[i, M-1]. \end{aligned}$$

自由表面の波

2 - 1) 解析手法による波 (理論式)

完全流体の運動方程式 (Eulerの方程式: N. S.方程式の粘性項なし)

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{K} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(P) \quad (1)$$

流れ: \mathbf{V} が速度ポテンシャル: ϕ を持ち、外力: \mathbf{K} がポテンシャルを持つとすると、(1)式を積分することにより次式が得られる。(証明略)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \mathbf{V} + \int \frac{dP}{\rho} = F(t) \quad (2)$$

(2)式において、波運動の速度 ($u^2+v^2+w^2$) が小さく、波運動が一定: $F(t)$ 一定、水面圧力: P 一定とし、以下の条件を満足すると仮定。

・ 水面での圧力一定: $\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\eta} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0}$ (η : 水面高さ) (3)

・ 水面の傾きが微小: $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0}$ (4)

(2), (3), (4)式を満たす、波の運動ポテンシャルを求めることとなる。

自由表面の波

2 - 2) 解析手法による波 (理論式)

(2), (3), (4)式を満たす、波の運動ポテンシャルは、次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (5)$$

$$\phi(x, z, t) = A \cosh(kz) \sin(kx + nt)$$

(5)式は、以下の波形状を表す。

$$\eta = \frac{H_w}{2} \sinh \frac{2\pi h}{L_w} \sin \left\{ \left(\frac{2\pi}{L_w} \right) (x + ct) \right\} \quad (6)$$

ここで、 H_w : 波高、 L_w : 波長、 h : 水深、 c : 波の位相速度

【参考】・ トロコイド波 (水面境界条件、渦なし条件 ×)

$$x = a + \frac{1}{k} e^{kb} \sin \{k(a + ct)\}, z = b - \frac{1}{k} e^{kb} \cos \{k(a + ct)\} \quad (7)$$

・ ストークス波: 有限波高波 (水面境界条件、渦なし条件)

$$z = a \left(1 + \frac{k^2 a^2}{8} \right) \cos \{k(x + ct)\} + \frac{ka^2}{2} \cos \{2k(x + ct)\} + \dots \quad (8)$$

自由表面の波

3 - 1) 数値計算手法による波(理論式)

海底に立つ角柱(dx, dy, h+h)に出入りする水の保存則(連続の式)より次式が得られる。

h : 水深、 η : 波高、 U(x,y,t), V(x,y,t) ; x, y方向の平均流速

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{(h + \eta)U\} + \frac{\partial}{\partial y} \{(h + \eta)V\} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} (hU) - \frac{\partial}{\partial y} (hV) = 0$$

$$U(x, y, t) = \frac{1}{D} \int_{-h}^{\eta} u(x, y, t) dz, V(x, y, t) = \frac{1}{D} \int_{-h}^{\eta} v(x, y, t) dz \quad (1)$$

$$D(x, y, t) = \eta(x, y, t) + h(x, y)$$

また、運動方程式は、Navier・Stokes方程式を簡易化することにより以下の式が得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

(2)

自由表面の波

3 - 2) 数値計算手法による波(理論式)

(1)式を、(3)式のように時間発展方程式の形で離散(差分)化する。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta_{j,k}}{\partial t} &= \frac{h_{j-1,k} U_{j-1,k} - h_{j+1,k} U_{j+1,k}}{\Delta_x} + \frac{h_{j,k-1} U_{j,k-1} - h_{j,k+1} U_{j,k+1}}{\Delta_y} \\
 \frac{\partial U_{j,k}}{\partial t} &= g \frac{\eta_{j-1,k} - \eta_{j+1,k}}{2\Delta_x} \\
 \frac{\partial V_{j,k}}{\partial t} &= g \frac{\eta_{j,k-1} - \eta_{j,k+1}}{2\Delta_y}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

(3)式において、 (j,k) と $(j+1, k)$ が独立に振舞うために、得られる数値解がギザギザとした分布になることが知られている。そのためスタカード格子(千鳥格子)を使って(4)式を用いることになる。

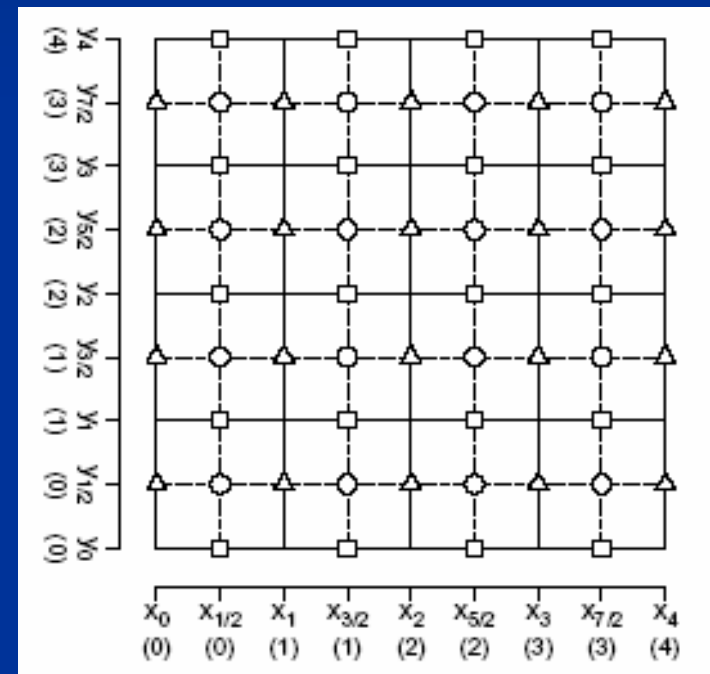
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \eta_{j+1/2,k+1/2}}{\partial t} &= \frac{h_{j,k+1/2} U_{j,k+1/2} - h_{j+1,k+1/2} U_{j+1,k+1/2}}{\Delta_x} + \frac{h_{j+1/2,k} U_{j+1/2,k} - h_{j+1/2,k+1} U_{j+1/2,k+1}}{\Delta_y} \\
 \frac{\partial U_{j,k+1/2}}{\partial t} &= g \frac{\eta_{j-1/2,k+1/2} - \eta_{j+1/2,k+1/2}}{2\Delta_x} \\
 \frac{\partial V_{j+1/2,k}}{\partial t} &= g \frac{\eta_{j+1/2,k-1/2} - \eta_{j+1/2,k+1/2}}{2\Delta_y}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

自由表面の波

3 - 3) 数値計算手法による波(理論式)

スタカード格子(千鳥格子):

印の点には波高, 印の点にはU, そして 印の点にはV をそれぞれ配したもの。



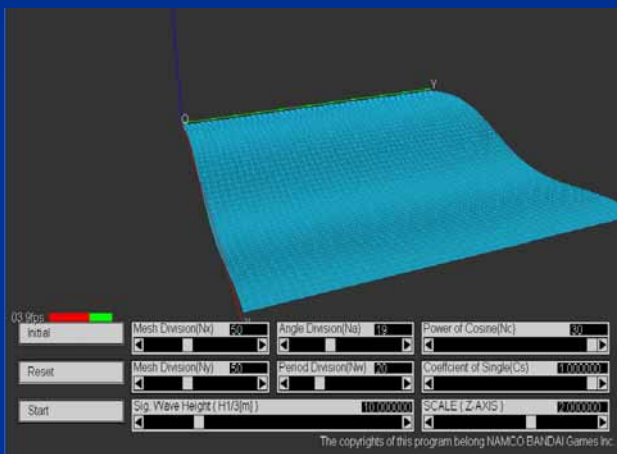
数値計算するにあたっては、時間積分の誤差や解の発散に注意する必要がある。

(参考文献: 東大 櫻庭 中著「地球惑星物理学演習: 時間発展問題に数値解法」)

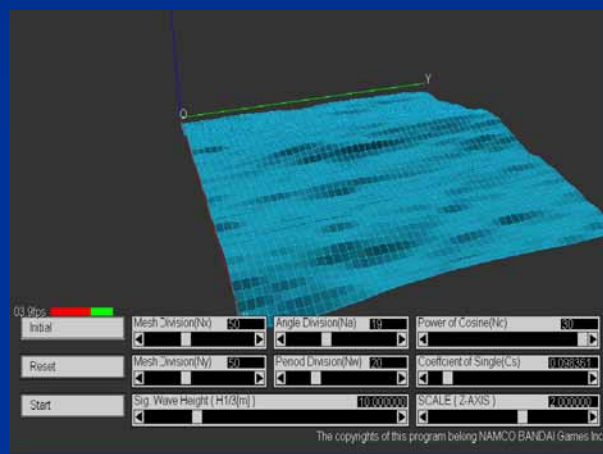
自由表面の波

4 - 1) 統計手法による波 (PC実演)

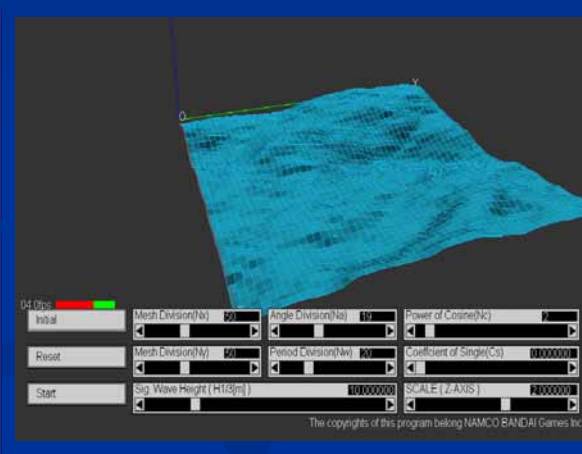
実際の海面の波は不規則 (長頂波不規則波、短頂波不規則波) であり、単独の正弦波やトロコイド波で表現することができない。



単独の正弦波



長頂波不規則波



短頂波不規則波

海洋波の統計的アプローチは、Sverdrup Munkの波浪予測理論に始まり、種々の不規則波スペクトラムが提案されている。

- ・ Pierson Moskowitzスペクトラム
- ・ Breitschneider 光易スペクトラム
- ・ ISSC (国際船体構造会議) スペクトラム
- ・ ITTC (国際試験水槽会議) スペクトラム
- ・ JONSWAP (北海合同観測計画) スペクトラム

自由表面の波

4 - 2) 統計手法による波 (理論式)

・ 単独の正弦波

$$\eta = \frac{H_w}{2} \sinh \frac{2\pi h}{L_w} \sin \left\{ \left(\frac{2\pi}{L_w} \right) (x + ct) \right\}$$

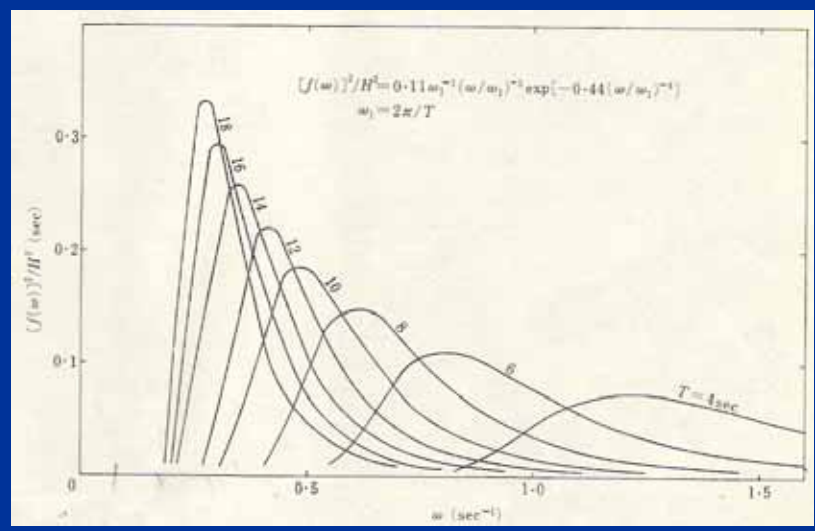
・ 長波頂不規則波スペクトラム (ISSCの海洋波スペクトラル)

$$[f(\omega)]^2 = 0.11 H^2 \omega_1^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^{-5} \text{EXP} \left[-0.44 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \right]^{-4}$$

・ 短波頂不規則波スペクトラム

$$[f(\omega, T)]^2 = k [f(\omega)]^2 \cos^n \left(\frac{\omega}{2} \quad \frac{\omega}{2} \right)$$

$[f(\omega, T)]^2 = 0$ (その他の場合)
 k及びnは定数で、ITTCでは暫定的に $\frac{2}{\omega}$ 、 $n = 2$



ISSCの海洋波スペクトラル
 出典:造船設計便覧

2次元の水面波

1 - 1) コーシーポアソン (Cauchy Poisson) 波 (理論式)

(特徴) 水面に石を投げたときに発生す波 (瞬間的な擾乱による波)

・ 自由表面の波速度ポテンシャルの物理条件

(水面条件)
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

(連続条件)
$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0$$

・ (1)式の解を、0次ベッセル関数: J_0 を用いて表現する。

$$\begin{aligned} \phi &= g \frac{\sin(\omega t)}{\sigma} e^{kz} J_0(kr) \\ \eta &= \cos(\omega t) J_0(kr) \\ \omega^2 &= gk, r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

・ 波長に較べて十分遠いところ ($kr \gg 1$) では、波高: η は次式となる。

$$\eta = -\frac{gt^3}{8\sqrt{2}\pi\rho r^4} \sin\left(\frac{gt^2}{4r}\right)$$

2次元の水面波

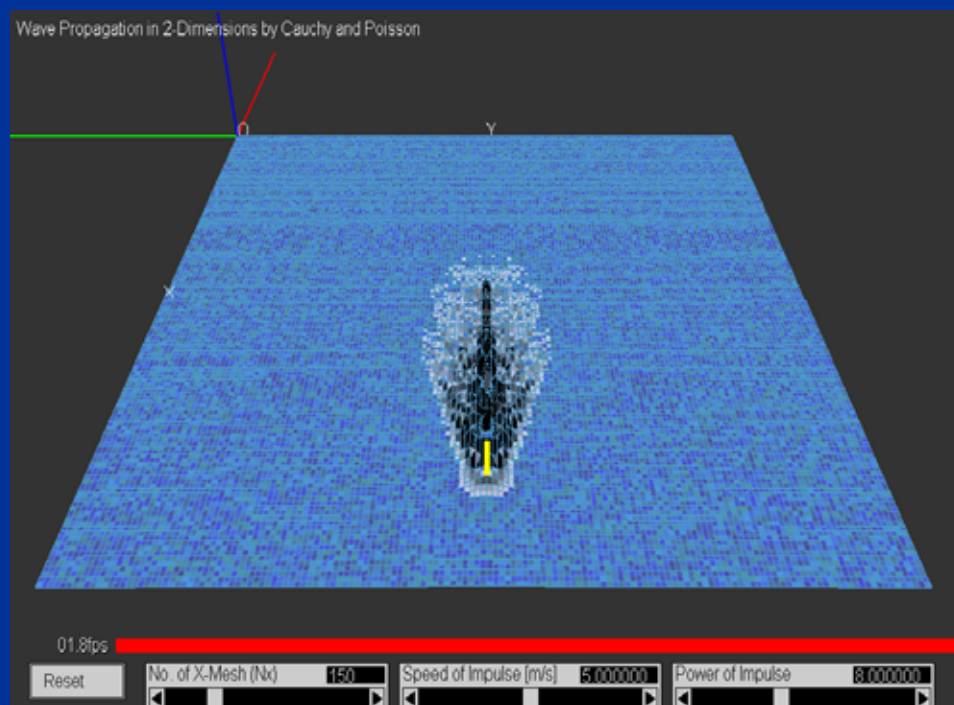
2 - 1) ケルビン (Kerwin) 波 (PC実演)

(特徴) 船のうしろに広がるくさび型の航跡を形成する波であり、コーシーポアソン波の干渉によって生じる。

波は、頂角約 38.56 度 $[=2\sin^{-1}(1/3)]$ の内部で励起される。



皇居お堀の白鳥が作る波



棒が作る波のシミュレーション

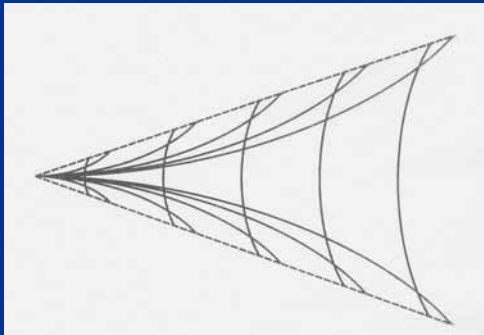
2次元の水面波

2 - 2) ケルビン (Kelvin) 波 (理論式)

- 航跡上の点Pで擾乱が強めあうには、点Pに到達する波の位相が同一である必要がある。擾乱が発生した点Qと点Pとの距離をsとすると、2点間の波の位相： $=gt^2/4s$ が同一となるためには、次式を満たす必要がある。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{g}{4} \left(\frac{2t}{s} - \frac{t^2}{s^2} \frac{\partial s}{\partial t} \right) = 0 \quad (1)$$

- 航跡が直進の場合、航跡の波の峰を表す曲線の式は、(1)式よりパラメーターとして次式で与えられる。



ケルビン (Kelvin) 波

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{4} (5 \cos \theta - \cos 3\theta) \\ y &= -\frac{a}{4} (\sin \theta + \sin 3\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

2次元の水面波

3 - 1) 自由旋回する船がつくる波(PC実演)

(特徴) 自由旋回する船のうしろに広がる波は、航跡上の瞬間的な擾乱による波(コーシーポアソン波)の干渉が連続的に発生して生じると考えられる。



自由旋回する船がつくる波のシミュレーション

2次元の水面波

3 - 2) 自由旋回する船がつくる波(理論式)

- 自由旋回する船のうしろに広がる波は、航跡上で発生した瞬間的な擾乱による波の波高: d は、単位時間: dt あたり次式で与えられる。

$$d\eta = -\frac{gt^3}{8\sqrt{2}\pi\rho r^4} \sin\left(\frac{gt^2}{4r}\right) P_0 dt \quad (1)$$

ここで、 P_0 は瞬間的な擾乱の圧力である。

(1)式により、水面のある点 $P(x, y, t)$ の波高 $\eta(x, y, t)$ は、次式のように表現できる。

$$\eta(x, y, t) = \sum_{i=i_0}^{i=i_N} \int_{t_0}^t \left\{ -\frac{g(t-t_i)^3}{8\sqrt{2}\pi\rho r_i^4} \sin\left[\frac{g(t-t_i)^2}{4r_i}\right] P_{0i} \right\} dt$$

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (2)$$

船の操縦運動

1 - 1) 船の操縦運動 (PC実演)

(特徴) 平水面に浮かぶ船の操縦運動は、船の前後、左右方向の並進運動 (前進: Surge、横流れ: Sway) と鉛直軸周りの回転運動 (旋回: Yaw) の連成運動である。



船の操縦運動のシミュレーション

船の操縦運動

1 - 2) 船の操縦運動(理論式)

- ・ 平水面に浮かぶ船の操縦運動は、船の前進運動(前後揺: Surge)の速度 u 、横流れ運動(左右揺: Sway)の速度 v 、鉛直 z 軸周りの旋回運動(船首揺: Yaw)の連成運動として、次式で表される。

$$\begin{aligned} m(\dot{u} - vr) &= X \\ m(\dot{v} + ur) &= Y \\ I_{zz}\dot{r} &= N \end{aligned}$$

(1)

ここで、 m は船の質量、 I_{zz} は船の z 軸周りの慣性モーメント
 X, Y, N は、前後左右方向の外力および z 軸周りの外力モーメント

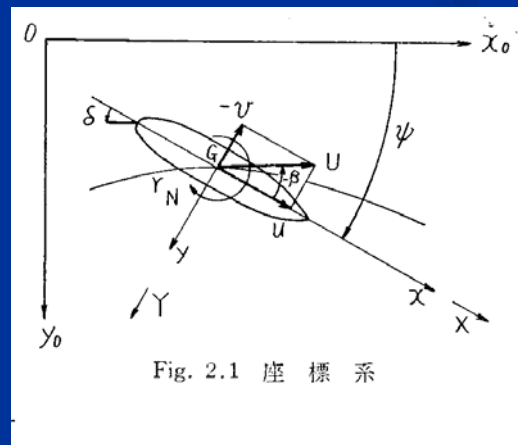


Fig. 2.1 座標系

船の操縦運動の座標系

船の操縦運動

1 - 3) 船の操縦運動(理論式)

- ・ (1)式は、厳密に解くことができないため、前進:u運動を無視し、かつ外力Y, NをTaylor展開して線形化すると、次式に変形できる。

$$\begin{aligned}
 -(m+m_y)U\dot{\beta} &= \left\{ -(m+m_x)U + Y_r^* \right\} r + Y_\beta \beta + Y_{\dot{\delta}} \dot{\delta} + Y_\delta \delta \\
 (I_{zz} + J_{zz})\dot{r} &= N_r r + N_\beta \beta + N_{\dot{\delta}} \dot{\delta} + N_\delta \delta
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

ここで、 $\dot{\beta}$ は船の横流れ角速度、 r は船の舵であり、 $m_x, m_y, J_{zz}, Y_r^*, Y_\beta, Y_{\dot{\delta}}, Y_\delta, N_r, N_\beta, N_{\dot{\delta}}, N_\delta$ は、流体力係数である。

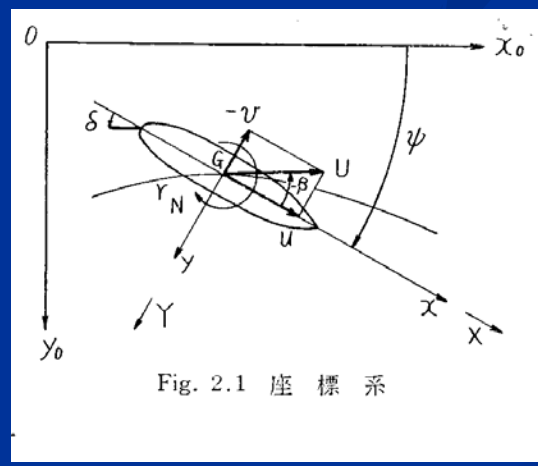


Fig. 2.1 座標系

船の操縦運動の座標系

船の操縦運動

1 - 4) 船の操縦運動 (理論式)

・ (2)式を、 r および β についての方程式に変形すると次式が得られる。

旋回運動:
$$T_1 T_2 \ddot{r} + (T_1 + T_2) \dot{r} + r = K \delta + K T_3 \dot{\delta} \quad (3)$$

横流れ運動:
$$T_1 T_2 \ddot{\beta} + (T_1 + T_2) \dot{\beta} + \beta = K_\beta \delta + K_\beta T_{3\beta} \dot{\delta}$$

ここで、 $T_1, T_2, T_3, T_{3\beta}, K, K_\beta$ は、流体力係数である。

さらに、(3)式は、以下のように近似的に表現することができる。

旋回運動:
$$T \dot{r} + r = K \delta \quad (4)$$

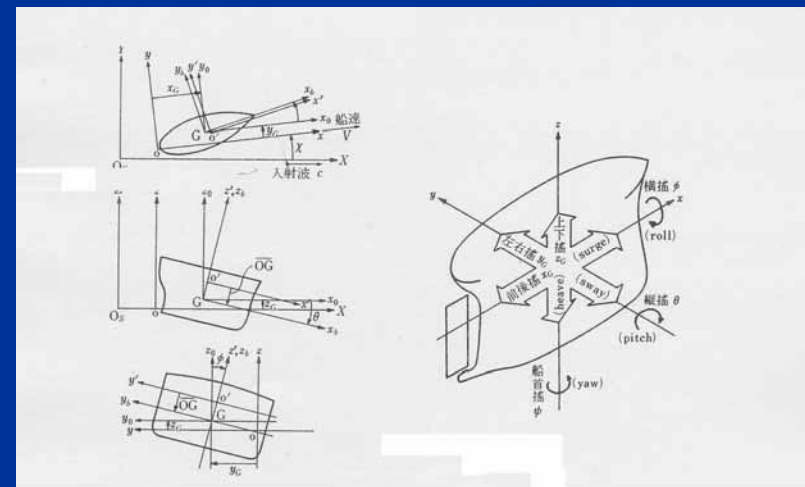
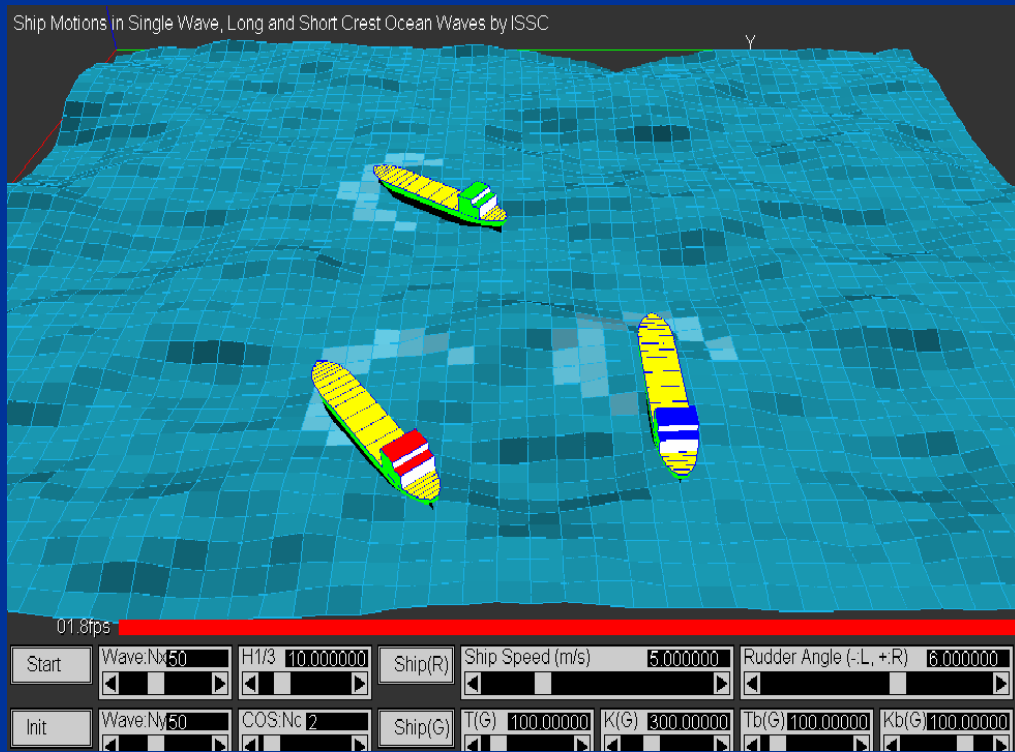
横流れ運動:
$$T_\beta \dot{\beta} + \beta = K_\beta \delta$$

(4)式は、Runge Kutta法などを使って数値積分する。

波浪中の船の3次元運動

3 - 1) 波浪中の船の3次元運動(PC実演)

(特徴) 波浪中の船の3次元運動は、船の前後、左右、上下方向の並進運動(前後: Surge、左右: Sway、上下: Heave)と、x, y, z軸周りの回転運動(横揺: Roll、縦揺: Pitch、船首揺: Yaw)の連成運動である。



波浪中の船の3次元運動の座標系

波浪中の船の3次元運動のシミュレーション

波浪中の船の3次元運動

3 - 2) 波浪中の船の3次元運動(理論式)

- 波浪中の船の3次元運動は、対称運動である前後運動(Surge)、上下運動(Heave)と縦揺運動(Pitch)について、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 a_{xx} \ddot{x}_g &= F_{xc} \cos \omega_e t + F_{xs} \sin \omega_e t \\
 a_{zz} \ddot{z}_g + b_{zz} \dot{z}_g + c_{zz} z_g + a_{z\theta} \ddot{\theta}_g + b_{z\theta} \dot{\theta}_g + c_{z\theta} \theta_g &= F_{zc} \cos \omega_e t + F_{zs} \sin \omega_e t \\
 a_{\theta\theta} \ddot{\theta}_g + b_{\theta\theta} \dot{\theta}_g + c_{\theta\theta} \theta_g + a_{\theta z} \ddot{z}_g + b_{\theta z} \dot{z}_g + c_{\theta z} z_g &= F_{\theta c} \cos \omega_e t + F_{\theta s} \sin \omega_e t
 \end{aligned} \tag{1}$$

また、非対称運動である左右運動(Sway)、横揺運動(Roll)と船首揺運動(Yaw)については、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 a_{yy} \ddot{y}_g + b_{yy} \dot{y}_g + c_{yy} y_g + a_{y\phi} \ddot{\phi}_g + b_{y\phi} \dot{\phi}_g + c_{y\phi} \phi_g + a_{y\psi} \ddot{\psi}_g + b_{y\psi} \dot{\psi}_g + c_{y\psi} \psi_g &= F_{yc} \cos \omega_e t + F_{ys} \sin \omega_e t \\
 a_{\phi\phi} \ddot{\phi}_g + b_{\phi\phi} \dot{\phi}_g + c_{\phi\phi} \phi_g + a_{\phi y} \ddot{y}_g + b_{\phi y} \dot{y}_g + c_{\phi y} y_g + a_{\phi\psi} \ddot{\psi}_g + b_{\phi\psi} \dot{\psi}_g + c_{\phi\psi} \psi_g &= F_{\phi c} \cos \omega_e t + F_{\phi s} \sin \omega_e t \\
 a_{\psi\psi} \ddot{\psi}_g + b_{\psi\psi} \dot{\psi}_g + c_{\psi\psi} \psi_g + a_{\psi y} \ddot{y}_g + b_{\psi y} \dot{y}_g + c_{\psi y} y_g + a_{\psi\phi} \ddot{\phi}_g + b_{\psi\phi} \dot{\phi}_g + c_{\psi\phi} \phi_g &= F_{\psi c} \cos \omega_e t + F_{\psi s} \sin \omega_e t
 \end{aligned} \tag{2}$$

(1), (2)式における係数は、ストリップ法などにより次頁の表に示すように定義されるが、内容については省略する。

(1), (2)式は、Runge Kutta法などを使って数値積分する。

波浪中の船の3次元運動

3 - 3) 波浪中の船の3次元運動(理論式)

表 85 (1) 船体運動方程式の係数 (対称運動)

係数	計 算 式	係数	計 算 式
a_{zz}	$M + f_L m_z dx$	a_{oo}	$I_{yy} + f_L m_z (x-x')^2 dx$
b_{zz}	$f_L N_z dx$	b_{oo}	$f_L N_z (x-x')^2 dx$
c_{zz}	$2\rho g f_L y_w dx$	c_{oo}	$2\rho g f_L y_w (x-x')^2 dx$
			$-V f_L N_z (x-x') dx$
			$-V^2 f_L m_z dx$
a_{zo}	$-f_L m_z (x-x') dx$	a_{oz}	$-f_L m_z (x-x') dx$
b_{zo}	$-f_L N_z (x-x') dx + V f_L m_z dx$	b_{oz}	$-f_L N_z (x-x') dx - V f_L m_z dx$
c_{zo}	$-2\rho g f_L y_w (x-x') dx + V f_L N_z dx$	c_{oz}	$-2\rho g f_L y_w (x-x') dx$
F_{zc}	$\omega \zeta_a f_L C_1 C_2 N_z \sin k^* x dx$ $-\omega \omega_e \zeta_a f_L C_1 C_2 m_z \cos k^* x dx$ $+2\rho g \zeta_a f_L C_1 C_2 y_w \cos k^* x dx$	M_{oc}	$-\omega \zeta_a f_L C_1 C_2 \rho N (x-x') \sin k^* x dx$ $+ \omega \omega_e \zeta_a f_L C_1 C_2 \rho s_{mz} (x-x') \sin k^* x dx$ $-\omega V \zeta_a f_L C_1 C_2 m_z \sin k^* x dx$ $-2\rho g \zeta_a f_L C_1 C_2 y_w (x-x') \cos k^* x dx$
F_{zs}	$-\omega \zeta_a f_L C_1 C_2 N_z \cos k^* x dx$ $-\omega \omega_e \zeta_a f_L C_1 C_2 m_z \sin k^* x dx$ $+2\rho g \zeta_a f_L C_1 C_2 y_w \cos k^* x dx$	F_{os}	$\omega \zeta_a f_L C_1 C_2 N_z (x-x') \cos k^* x dx$ $+ \omega \omega_e \zeta_a f_L C_1 C_2 m_z (x-x') \sin k^* x dx$ $+ \omega V \zeta_a f_L C_1 C_2 m_z \cos k^* x dx$ $-2\rho g f_L C_1 C_2 y_w (x-x') \sin k^* x dx$

注) 1. M : 船体質量, I_{yy} : 船体の縦質量慣性モーメント, m_z : 2次元断面付加質量, N_z : 2次元断面減衰力, ω : 入射波の円周波数, ω_e : 出会円周波数, x' : 船体中央から重心までの水平距離, y_w : 水線面半幅, ζ_a : 波振幅, ρ : 水の密度, V : 船速, χ : 出会角
2. f_L は船長方向の積分を表し, 端部影響は含まない.
3. $C_1 = \sin(k y_w \sin \chi) / k y_w \sin \chi$, $C_2 = e^{-kd}$, $d_m = \text{断面積} / 2 y_w$, $k^* = k \cos \chi$

表 85 (2) 船体運動方程式の係数 (反対称運動)

係数	計 算 式	係数	計 算 式
a_{yy}	$M + f_L m_y dx$	F_{yc}	$-2\rho g \zeta_a f_L \sin k^* x f_a e^{kz} (k y \sin \chi) dz dx$ $-\omega \omega_e \zeta_a \sin \chi f_L m_y e^{kz} \sin k^* x dx$ $+ \omega \zeta_a \sin \chi f_L N_y e^{kz} \cos k^* x dx$
b_{yy}	$f_L N_y dx$	F_{ys}	$-2\rho g \zeta_a f_L \cos k^* x f_a e^{kz} (k y \sin \chi) dz dx$ $-\omega \omega_e \zeta_a \sin \chi f_L m_y e^{kz} \cos k^* x dx$ $-\omega \zeta_a \sin \chi f_L N_y e^{kz} \sin k^* x dx$
c_{yy}	0		
a_{yo}	$f_L m_y (x-x') dx$		
b_{yo}	$f_L N_y (x-x') dx - V f_L m_y dx$		
c_{yo}	$-V f_L N_y dx$		
$a_{y\theta}$	$f_L m_y l'_{1\theta} dx$	M_{oc}	$-2\rho g \zeta_a f_L (x-x') \sin k^* x f_a e^{kz} \sin (k y \sin \chi) dz dx$ $-\omega \omega_e \zeta_a \sin \chi f_L m_y (x-x') e^{kz} \sin k^* x dx$ $+ \omega \zeta_a \sin \chi f_L N_y (x-x') e^{kz} \cos k^* x dx$ $+ \omega V \zeta_a \sin \chi f_L m_y e^{kz} \cos k^* x dx$
$b_{y\theta}$	$f_L N_y l'_{1\theta} dx$	M_{os}	$-2\rho g \zeta_a f_L (x-x') \cos k^* x f_a e^{kz} \sin (k y \sin \chi) dz dx$ $-\omega \omega_e \zeta_a \sin \chi f_L m_y (x-x') e^{kz} \cos k^* x dx$ $-\omega \zeta_a \sin \chi f_L N_y (x-x') e^{kz} \sin k^* x dx$ $-\omega V \zeta_a \sin \chi f_L m_y e^{kz} \sin k^* x dx$
$c_{y\theta}$	0		
$a_{\theta\theta}$	$I_{xx} + f_L m_y (x-x')^2 dx$		
$b_{\theta\theta}$	$f_L N_y (x-x')^2 dx$		
$c_{\theta\theta}$	$-V^2 f_L m_y dx$		
$a_{\theta y}$	$f_L m_y l'_{1y} (x-x') dx$	$M_{\theta c}$	$\overline{OG} \cdot F_{yc}$ $+2\rho g \zeta_a f_L \sin k^* x f_a e^{kz} \sin (k y \sin \chi) (y dy + z dz) dx$ $-\omega \omega_e \zeta_a \sin \chi f_L m_y l'_{1y} e^{kz} \sin k^* x dx$ $+ \omega \zeta_a \sin \chi f_L N_y l'_{1y} e^{kz} \cos k^* x dx$
$b_{\theta y}$	$f_L N_y l'_{1y} (x-x') dx + V f_L m_y dx$	$M_{\theta s}$	$\overline{OG} \cdot F_{ys}$ $+2\rho g \zeta_a f_L \cos k^* x f_a e^{kz} \sin (k y \sin \chi) (y dy + z dz) dx$ $-\omega \omega_e \zeta_a \sin \chi f_L m_y l'_{1y} e^{kz} \cos k^* x dx$ $-\omega \zeta_a \sin \chi f_L N_y l'_{1y} e^{kz} \sin k^* x dx$
$c_{\theta y}$	0		
$a_{\theta\theta}$	$I_{xx} + f_L (I_x - 2m_y l'_{1x} \overline{OG} + M_y \overline{OG}^2) dx$		
$b_{\theta\theta}$	$f_L N_y l'_{1x}^2 dx$		
$c_{\theta\theta}$	$\omega \overline{GM}$		
$a_{\theta y}$	$f_L m_y l'_{1y} dx$		
$b_{\theta y}$	$f_L N_y l'_{1y} dx$		
$c_{\theta y}$	0	$b_{\theta y}$	$f_L N_y l'_{1y} (x-x') dx - V f_L m_y l'_{1y} dx$
$a_{\theta\theta}$	$f_L m_y l'_{1x} (x-x') dx$	$c_{\theta y}$	$-V f_L N_y l'_{1y} dx$

注) 1. M : 船体質量, I_{xx} : 船体の x 軸まわり質量慣性モーメント, m_y : 2次元断面の付加質量 (左右揺), N_y : 2次元断面の減衰力 (左右揺), x' : 船体中央から重心までの水平距離, $l'_{1x} - l'_{1y} = \overline{OG}$, $l'_{1x} - l'_{1y} = \overline{OG}$, $I_{xx} - I_{yy}$: 第1編 4.6.1 参照, \overline{OG} : 図 86 参照, $gd' = -kd/2$, I_{xx} : 船体の x 軸まわり質量慣性モーメント, \overline{GM} : メタセンタ高さ, I_x : 2次元断面の付加質量慣性モーメント.
2. f_L は船長方向の積分を表し, 端部影響は含まない, また, f_a は喫水方向の積分を表す.

2次元完全流体(複素ポテンシャル論)

完全流体とは、非圧縮、粘性なし、粒子が非回転の流体

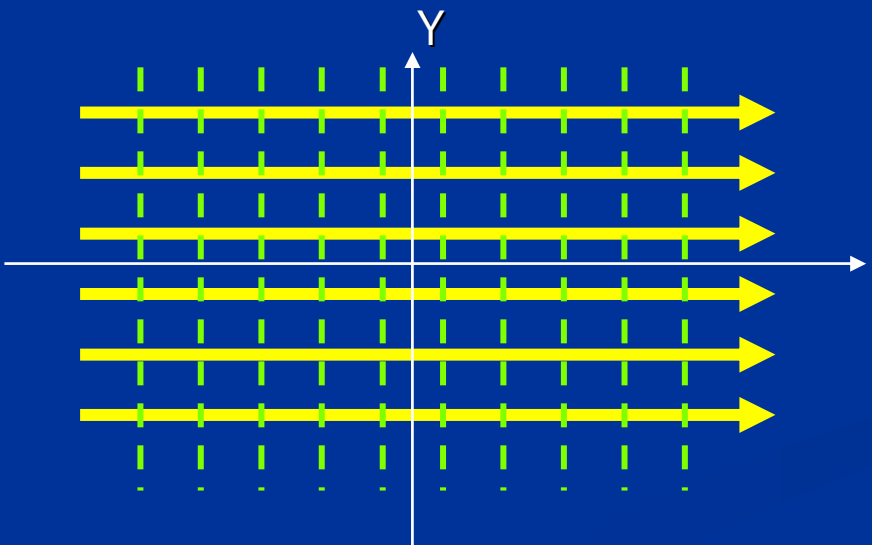
簡単な流れ場を複素ポテンシャル関数で表現可能

複素ポテンシャル関数=速度ポテンシャル関数 + i * 流れ関数

$$W(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

(1) 平行流【最も簡単な複素ポテンシャル関数】

----- 速度ポテンシャル関数
—————> 流れ関数



複素ポテンシャル関数 $W(z)$, ($z = X + i * Y = r * e^{i\theta}$)

$$W(z) = z = X + i * Y$$

複素ポテンシャル関数、流れ関数

$$\phi = X$$

$$\psi = Y$$

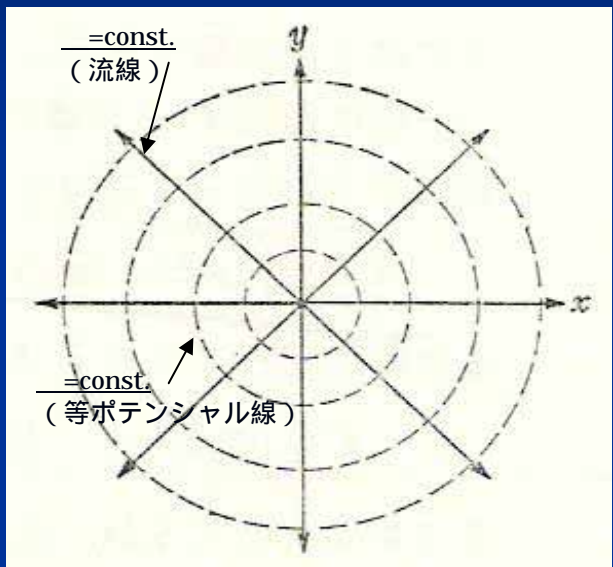
流速 $V(V_x, V_y)$
$$V_x - i * V_y = \frac{dW}{dz} = 1$$

$$V_x = 1$$

$$V_y = 0$$

2次元完全流体(複素ポテンシャル論)

(2) 吹出し(吸込み)



複素ポテンシャル関数 $W(Z)$, ($Z=X+i*Y=r*e^{i*}$)

$$W(Z) = m * \log(Z) = m * \log(r) + i * \theta$$

複素ポテンシャル関数、流れ関数

$$= m * \log(r) = m$$

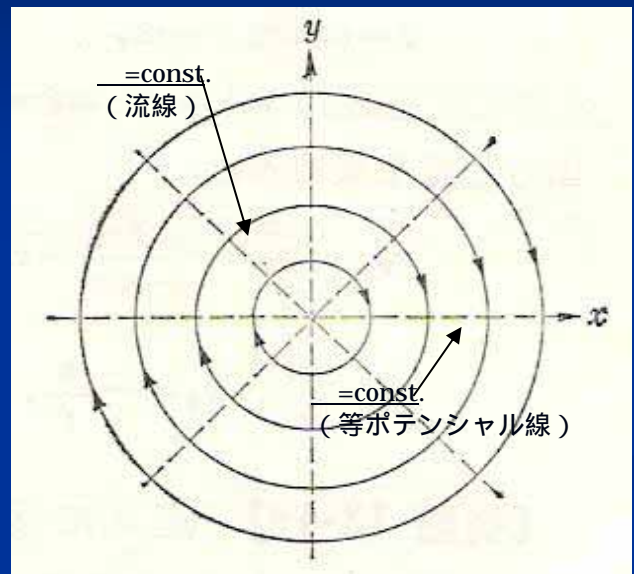
流速 $V(V_x, V_y) = V(V_r, V_\theta)$

$$V_r - i * V_\theta = e^{i*} \frac{dW}{dZ} = e^{i*} \frac{m}{Z} = \frac{m}{r} e^{i*}$$

$$V_r = \frac{m}{r}$$

$$V_\theta = 0$$

(3) 循環流



複素ポテンシャル関数 $W(Z)$, ($Z=X+i*Y=r*e^{i*}$)

$$W(Z) = i * \theta = i * \arg(Z)$$

複素ポテンシャル関数、流れ関数

$$= - * \log(r) = * \log(r)$$

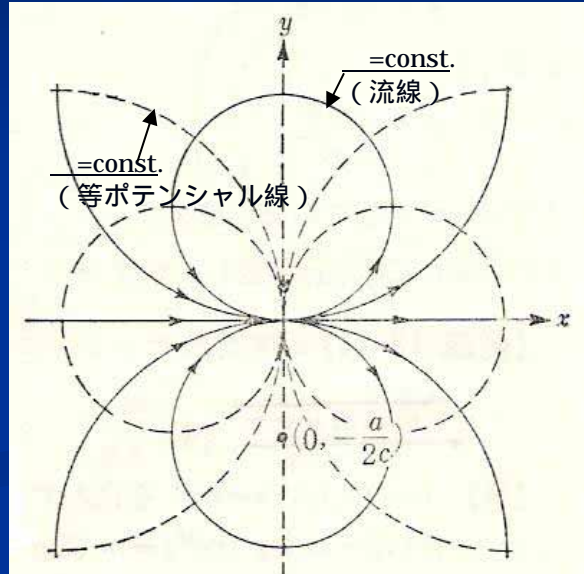
流速 $V(V_x, V_y) = V(V_r, V_\theta)$

$$V_r - i * V_\theta = e^{i*} \frac{dW}{dZ} = e^{i*} \frac{i}{Z} = \frac{i}{r} e^{i*}$$

$$V_r = 0$$

$$V_\theta = - \frac{1}{r}$$

(4) 二重吹出し



複素ポテンシャル関数: $W(Z)$, ($Z=X+i*Y=r*e^{i*}$)

$$W(Z) = \frac{a}{Z} = \frac{ax}{X^2+Y^2} - i \frac{ay}{X^2+Y^2}$$

複素ポテンシャル関数、流れ関数:

$$= \frac{ax}{X^2+Y^2} = - \frac{ay}{X^2+Y^2}$$

流速: $V(V_x, V_y) = V(V_r, V_\theta)$

$$V_x - i * V_y = \frac{dW}{dZ} = - \frac{a}{Z^2} = - \frac{a(X^2-Y^2 - i * 2XY)}{(X^2+Y^2)^2}$$

$$V_x = - \frac{a(X^2-Y^2)}{(X^2+Y^2)^2}$$

$$V_y = - \frac{2aXY}{(X^2+Y^2)^2}$$

2次元完全流体(複素ポテンシャル論)

-1 揺動回転円柱の流れ場(PC実演)

複素ポテンシャル関数: $W(Z)$

$$W(Z) = U * \left(\frac{Z - Z_0}{e^{i * \alpha}} + \frac{b^2 e^{i * \alpha}}{Z - Z_0} \right) + i * \Gamma * \log(Z - Z_0)$$

U : 流れの速さ、 α : 流れの角度、 Γ : 渦の強さ
 b : 円柱の半径、 z_0 : 円柱の中心位置



2次元完全流体(複素ポテンシャル論)

-2 揺動回転円柱の流れ場(理論式)

複素ポテンシャル関数: $W(Z)$, ($Z = X + i * Y = r * e^{i * \theta}$)

$$W(Z) = U * \left(\frac{Z - Z_0}{e^{i * \alpha}} + \frac{b^2 e^{i * \alpha}}{Z - Z_0} \right) + i * \Gamma * \log(Z - Z_0)$$

ただし、 U : 流れの速さ、 α : 流れの角度、 Γ : 渦の強さ

b : 円柱の半径、 Z_0 : 円柱の中心位置

流速: $V(V_x, V_y)$

$$V_x - i * V_y = \frac{dW}{dZ} = U * \left(\frac{1}{e^{i * \alpha}} - \frac{b^2 e^{i * \alpha}}{(Z - Z_0)^2} \right) + i * \Gamma * \frac{1}{Z}$$

$$V_x = U * \left[\cos \alpha - \frac{b^2}{(X_1^2 + Y_1^2)^2 + 4X_1^2 Y_1^2} \{ (X_1^2 - Y_1^2) * \cos \alpha + 2X_1 Y_1 * \sin \alpha \} \right] + \frac{\Gamma Y_1}{X_1^2 + Y_1^2}$$

$$V_y = U * \left[\sin \alpha + \frac{b^2}{(X_1^2 + Y_1^2)^2 + 4X_1^2 Y_1^2} \{ (X_1^2 - Y_1^2) * \sin \alpha - 2X_1 Y_1 * \cos \alpha \} \right] - \frac{\Gamma X_1}{X_1^2 + Y_1^2}$$

ただし、 $X_1 = X - X_0$, $Y_1 = Y - Y_0$

揺動回転円柱の流れ場のパーティクルの動き:

$$Z_{p(t)}(X_{p(t)}, Y_{p(t)}) \rightarrow Z_{p(t+\Delta t)}(X_{p(t+\Delta t)}, Y_{p(t+\Delta t)})$$

$$X_{p(t+\Delta t)} = X_{p(t)} + V_x(t) * \Delta t$$

$$Y_{p(t+\Delta t)} = Y_{p(t)} + V_y(t) * \Delta t$$

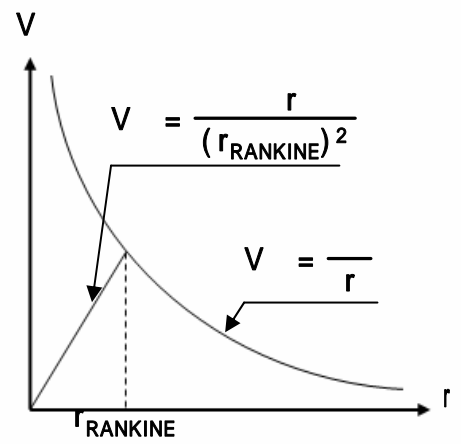
2次元完全流体 (複素ポテンシャル論)

-1 壁と円柱に沿った複数渦の流れ場 (PC実演)

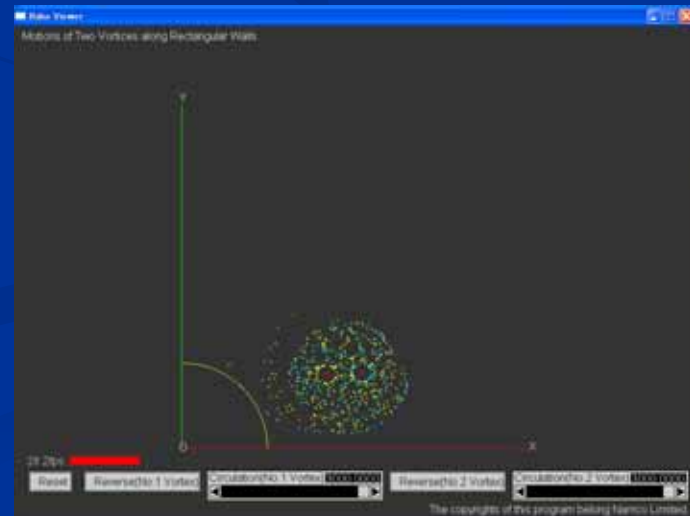
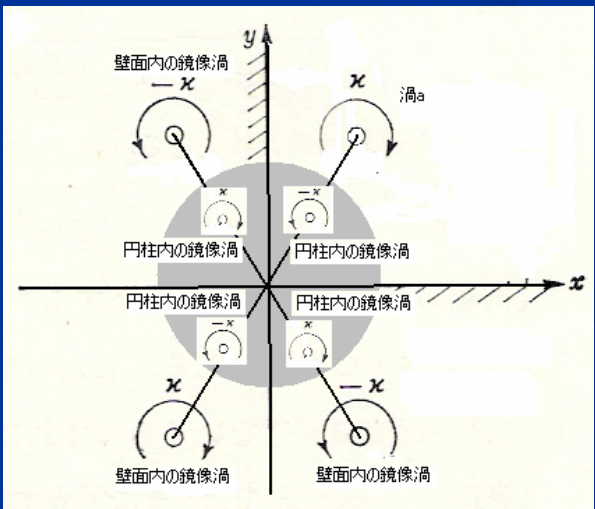
複素ポテンシャル関数: $W(Z)$, ($Z = X + i * Y = r * e^{i * \theta}$)

$$W(Z) = \sum_{p=1}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * a * \log(Z - Z_{ap}) + (-1)^p * i * a * \log(Z - Z_{ap}^*) \right\} + \sum_{p=1}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * b * \log(Z - Z_{bp}) + (-1)^p * i * b * \log(Z - Z_{bp}^*) \right\}$$

ここで、 Z_{a1} 、 Z_{b1} : Z 平面の第1象限にある渦a、bの位置、 a 、 b : 渦a、bの強さ
 Z_{ap} ($p = 2 \sim 4$): Z 平面の第2~4象限にある渦aの壁面の鏡像渦の位置
 Z_{ap}^* ($p = 1 \sim 4$): Z 平面の第1~4象限にある渦aの円柱内の鏡像渦の位置



循環流とランキン渦の回転速度



2次元完全流体(複素ポテンシャル論)

-2 壁と円柱に沿った複数渦の流れ場(理論式)

複素ポテンシャル関数: $W(Z)$, ($Z = X + i * Y = r * e^{i * \theta}$)

$$W(Z) = \sum_{p=1}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * a * \log(Z - Z_{ap}) + (-1)^p * i * a * \log(Z - Z_{ap}^*) \right\} + \sum_{p=1}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * b * \log(Z - Z_{bp}) + (-1)^p * i * b * \log(Z - Z_{bp}^*) \right\}$$

$$= + i *$$

Z_{a1}, Z_{b1} : Z平面の第1象限にある渦a, bの位置、 a, b : 渦a, bの強さ

$$Z_{a1} = X_a + i * Y_a = r_a * e^{i * \theta_a}, Z_{b1} = X_b + i * Y_b = r_b * e^{i * \theta_b}$$

Z_{ap} ($p = 2 \sim 4$): Z平面の第2~4象限にある渦aの壁面の鏡像渦の位置

$$Z_{a2} = -X_a + i * Y_a = r_a * e^{i * (\pi - \theta_a)}, Z_{b2} = -X_b + i * Y_b = r_b * e^{i * (\pi - \theta_b)}$$

$$Z_{a3} = -X_a - i * Y_a = r_a * e^{i * (\pi + \theta_a)}, Z_{b3} = -X_b - i * Y_b = r_b * e^{i * (\pi + \theta_b)}$$

$$Z_{a4} = +X_a - i * Y_a = r_a * e^{i * (2\pi - \theta_a)}, Z_{b4} = +X_b - i * Y_b = r_b * e^{i * (2\pi - \theta_b)}$$

Z_{ap}^* ($p = 1 \sim 4$): Z平面の第1~4象限にある渦aの円柱内の鏡像渦の位置

$$Z_{a1}^* = \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^2 * e^{i * \theta_a}, Z_{b1}^* = \left(\frac{r_0}{r_b}\right)^2 * e^{i * \theta_b}$$

$$Z_{a2}^* = \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^2 * e^{i * (\pi - \theta_a)}, Z_{b2}^* = \left(\frac{r_0}{r_b}\right)^2 * e^{i * (\pi - \theta_b)}$$

$$Z_{a3}^* = \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^2 * e^{i * (\pi + \theta_a)}, Z_{b3}^* = \left(\frac{r_0}{r_b}\right)^2 * e^{i * (\pi + \theta_b)}$$

$$Z_{a4}^* = \left(\frac{r_0}{r_a}\right)^2 * e^{i * (2\pi - \theta_a)}, Z_{b4}^* = \left(\frac{r_0}{r_b}\right)^2 * e^{i * (2\pi - \theta_b)}$$

r_0 : 円柱の半径

流速: $V(V_x, V_y)$

$$V_x - i * V_y = \frac{dW}{dZ} = \sum_{p=1}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * a * \frac{1}{Z - Z_{ap}} + (-1)^p * i * a * \frac{1}{Z - Z_{ap}^*} \right\} + \sum_{p=1}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * b * \frac{1}{Z - Z_{bp}} + (-1)^p * i * b * \frac{1}{Z - Z_{bp}^*} \right\}$$

但し、 $\sqrt{(X - X_{ap})^2 + (Y - Y_{ap})^2}$ $\Gamma_{RANKINE}$ 、または $\sqrt{(X - X_{bp})^2 + (Y - Y_{bp})^2}$ $\Gamma_{RANKINE}$

($p = 1 \sim 4$)の時、 $\frac{1}{Z - Z_{ap}}$ を $\frac{Z - Z_{ap}}{(\Gamma_{RANKINE})^2}$ 、または、 $\frac{1}{Z - Z_{bp}}$ を $\frac{Z - Z_{bp}}{(\Gamma_{RANKINE})^2}$ に置き換

えて計算する。

渦aの移動速度: $V_a(V_{ax}, V_{ay})$

$$V_{ax} - i * V_{ay} = \sum_{p=2}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * a * \frac{1}{Z_{a1} - Z_{ap}} + (-1)^p * i * a * \frac{1}{Z_{a1} - Z_{ap}^*} \right\} + \sum_{p=1}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * b * \frac{1}{Z_{a1} - Z_{bp}} + (-1)^p * i * b * \frac{1}{Z_{a1} - Z_{bp}^*} \right\}$$

但し、 $\sqrt{(X_{a1} - X_{ap})^2 + (Y_{a1} - Y_{ap})^2}$ $\Gamma_{RANKINE}$ 、または、 $\sqrt{(X_{a1} - X_{bp})^2 + (Y_{a1} - Y_{bp})^2}$

$\Gamma_{RANKINE}$ ($p = 1 \sim 4$)の時、 $\frac{1}{Z_{a1} - Z_{ap}}$ を $\frac{Z_{a1} - Z_{ap}}{(\Gamma_{RANKINE})^2}$ 、または、 $\frac{1}{Z_{a1} - Z_{bp}}$ を $\frac{Z_{a1} - Z_{bp}}{(\Gamma_{RANKINE})^2}$

に置き換えて計算する。

渦bの移動速度: $V_b(V_{bx}, V_{by})$

$$V_{bx} - i * V_{by} = \sum_{p=1}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * a * \frac{1}{Z_{b1} - Z_{ap}} + (-1)^p * i * a * \frac{1}{Z_{b1} - Z_{ap}^*} \right\} + \sum_{p=2}^4 \left\{ (-1)^{p-1} * i * b * \frac{1}{Z_{b1} - Z_{bp}} + (-1)^p * i * b * \frac{1}{Z_{b1} - Z_{bp}^*} \right\}$$

但し、 $\sqrt{(X_{b1} - X_{ap})^2 + (Y_{b1} - Y_{ap})^2}$ $\Gamma_{RANKINE}$ 、または、 $\sqrt{(X_{b1} - X_{bp})^2 + (Y_{b1} - Y_{bp})^2}$

$\Gamma_{RANKINE}$ ($p = 1 \sim 4$)の時、 $\frac{1}{Z_{b1} - Z_{ap}}$ を $\frac{Z_{b1} - Z_{ap}}{(\Gamma_{RANKINE})^2}$ 、または、 $\frac{1}{Z_{b1} - Z_{bp}}$ を $\frac{Z_{b1} - Z_{bp}}{(\Gamma_{RANKINE})^2}$

に置き換えて計算する。

2次元完全流体(複素写像変換)

-1 Joukowski変換による翼の流れ場(PC実演)

揺動回転円柱の流れ場の複素ポテンシャル関数:

$$W(Z) = U * \left(\frac{Z-Z_0}{e^{i * \alpha}} + \frac{b^2 e^{i * \alpha}}{Z - Z_0} \right) + i * \Gamma * \log(Z-Z_0)$$



複素写像変換(Joukowski変換)

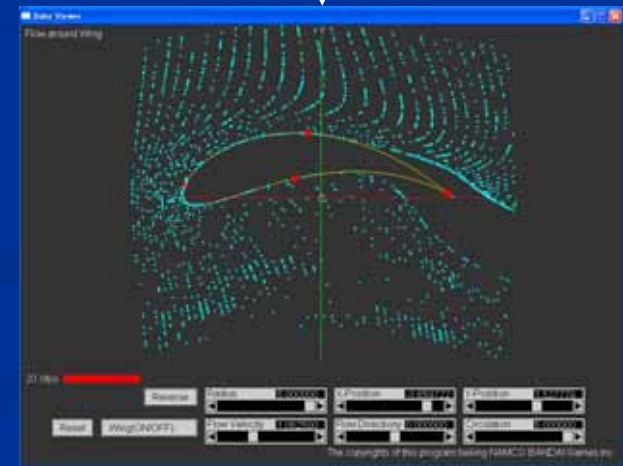
$$\begin{aligned} &= Z + \frac{a^2}{Z} \\ &= X + \frac{a^2 X}{X^2 + Y^2} \\ &= Y - \frac{a^2 Y}{X^2 + Y^2} \end{aligned}$$



ここで、a: Joukowski変換パラメータ

翼の流れ場の複素ポテンシャル関数:

$$W(\zeta), \quad \zeta = z + i * \frac{a^2}{z}$$



2次元完全流体(複素写像変換)

-2 Joukowski変換による翼の流れ場(理論式)

揺動回転円柱の流れ場の複素ポテンシャル関数: $W(Z)$ 、 ($Z = X + i * Y = r * e^{i * \theta}$)

$$W(Z) = U * \left(\frac{Z - Z_0}{e^{i * \alpha}} + \frac{b^2 e^{i * \alpha}}{Z - Z_0} \right) + i * \Gamma * \log(Z - Z_0)$$

ただし、 U : 流れの速さ、 α : 流れの角度、 Γ : 渦の強さ

b : 円柱の半径、 Z_0 : 円柱の中心位置

揺動回転円柱の流れ場のパーティクルの動き:

$$Z_p(t) (X_p(t), Y_p(t)) \rightarrow Z_p(t + \Delta t) (X_p(t + \Delta t), Y_p(t + \Delta t))$$

$$X_p(t + \Delta t) = X_p(t) + V_x(t) * \Delta t$$

$$Y_p(t + \Delta t) = Y_p(t) + V_y(t) * \Delta t$$

$$V_x = U * \left[\cos \alpha - \frac{b^2}{(X_1^2 + Y_1^2)^2 + 4X_1^2 Y_1^2} \{ (X_1^2 - Y_1^2) * \cos \alpha + 2X_1 Y_1 * \sin \alpha \} \right] + \frac{\Gamma Y_1}{X_1^2 + Y_1^2}$$

$$V_y = U * \left[\sin \alpha + \frac{b^2}{(X_1^2 + Y_1^2)^2 + 4X_1^2 Y_1^2} \{ (X_1^2 - Y_1^2) * \sin \alpha - 2X_1 Y_1 * \cos \alpha \} \right] - \frac{\Gamma X_1}{X_1^2 + Y_1^2}$$

ただし、 $X_1 = X - X_0$, $Y_1 = Y - Y_0$

翼の流れ場の複素ポテンシャル関数: $W(z)$ 、 ($z = \zeta + i * \eta$)

翼の流れ場のパーティクルの位置: $z_p = (x_p, y_p)$

$$z_p = Z_p + \frac{a^2}{Z_p}, \quad (a: \text{Joukowski変換のパラメータ})$$

$$x_p = X_p + \frac{a^2 X_p}{X_p^2 + Y_p^2}$$

$$y_p = Y_p - \frac{a^2 Y_p}{X_p^2 + Y_p^2}$$

2次元完全流体(複素写像変換)

-1 拡張Lewis Form変換の流れ場(PC実演)

揺動回転円柱の流れ場の

複素ポテンシャル関数:

$$W(Z) = U * \left(\frac{Z-Z_0}{e^{i\alpha}} + \frac{b^2 e^{i\alpha}}{Z-Z_0} \right) + i * \alpha * \log(Z-Z_0)$$

複素写像変換(拡張Lewis Form変換)

$$= M * \left(Z + \frac{a_1}{Z} + \frac{a_2}{Z^2} + \frac{a_3}{Z^3} + \frac{a_4}{Z^4} + \frac{a_5}{Z^5} \right)$$

$$= M * \left(r \cos \theta + \frac{a_1}{r} \cos \theta + \frac{a_2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{a_3}{r^3} \cos 3\theta + \frac{a_4}{r^4} \cos 4\theta + \frac{a_5}{r^5} \cos 5\theta \right)$$

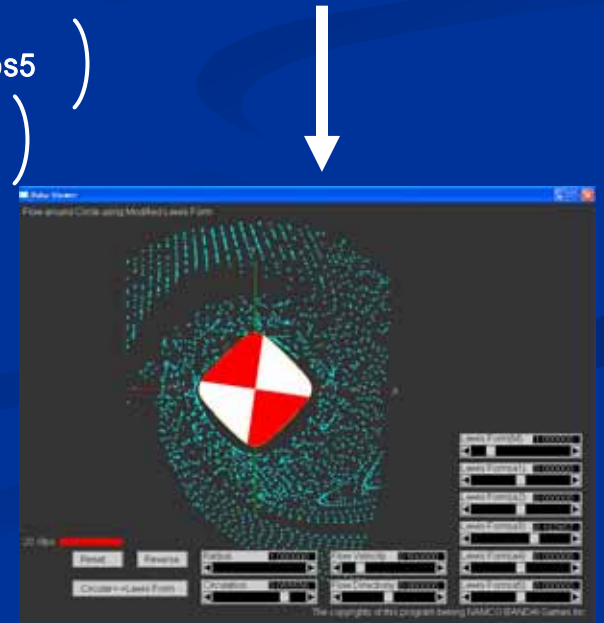
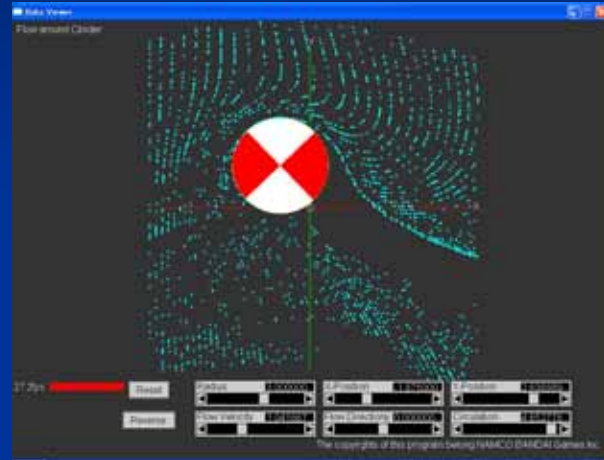
$$= M * \left(r \sin \theta - \frac{a_1}{r} \sin \theta - \frac{a_2}{r^2} \sin 2\theta - \frac{a_3}{r^3} \sin 3\theta - \frac{a_4}{r^4} \sin 4\theta - \frac{a_5}{r^5} \sin 5\theta \right)$$

ここで、M、a₁、a₂、a₃、a₄、a₅は、
拡張Lewis Form変換のパラメータ

拡張Lewis Form変換の流れ場の

複素ポテンシャル関数:

$$W()、(= + i *)$$



2次元完全流体(複素写像変換)

-2 拡張Lewis Form変換の流れ場(理論式)

揺動回転円柱の流れ場の複素ポテンシャル関数: $W(Z)$, ($Z = X + i * Y = r * e^{i * \theta}$)

$$W(Z) = U * \left(\frac{Z-Z_0}{e^{i * \alpha}} + \frac{b^2 e^{i * \alpha}}{Z - Z_0} \right) + i * \Gamma * \log(Z - Z_0)$$

ただし、 U : 流れの速さ、 α : 流れの角度、 Γ : 渦の強さ

b : 円柱の半径、 Z_0 : 円柱の中心位置

揺動回転円柱の流れ場のパーティクルの動き:

$$Z_{p(t)}(X_{p(t)}, Y_{p(t)}) \rightarrow Z_{p(t+\Delta t)}(X_{p(t+\Delta t)}, Y_{p(t+\Delta t)})$$

$$X_{p(t+\Delta t)} = X_{p(t)} + V_x(t) * \Delta t$$

$$Y_{p(t+\Delta t)} = Y_{p(t)} + V_y(t) * \Delta t$$

$$V_x = U * \left[\cos \alpha - \frac{b^2}{(X_1^2 + Y_1^2)^2 + 4X_1^2 Y_1^2} \{ (X_1^2 - Y_1^2) * \cos \alpha + 2X_1 Y_1 * \sin \alpha \} \right] + \frac{\Gamma Y_1}{X_1^2 + Y_1^2}$$

$$V_y = U * \left[\sin \alpha + \frac{b^2}{(X_1^2 + Y_1^2)^2 + 4X_1^2 Y_1^2} \{ (X_1^2 - Y_1^2) * \sin \alpha - 2X_1 Y_1 * \cos \alpha \} \right] - \frac{\Gamma X_1}{X_1^2 + Y_1^2}$$

ただし、 $X_1 = X - X_0$, $Y_1 = Y - Y_0$

拡張Lewis Form変換の複素ポテンシャル関数: $W(\zeta)$, ($\zeta = \rho + i * \theta$)

拡張Lewis Form変換の流れ場のパーティクルの位置: $p(\rho_p, \theta_p)$

$$\rho = M * \left(Z_p + \frac{a_1}{Z_p} + \frac{a_2}{Z_p^2} + \frac{a_3}{Z_p^3} + \frac{a_4}{Z_p^4} + \frac{a_5}{Z_p^5} \right)$$

$$\rho = M * \left(r_p \cos \theta_p + \frac{a_1}{r_p} \cos \theta_p + \frac{a_2}{r_p^2} \cos 2\theta_p + \frac{a_3}{r_p^3} \cos 3\theta_p + \frac{a_4}{r_p^4} \cos 4\theta_p + \frac{a_5}{r_p^5} \cos 5\theta_p \right)$$

$$\rho = M * \left(r_p \sin \theta_p - \frac{a_1}{r_p} \sin \theta_p - \frac{a_2}{r_p^2} \sin 2\theta_p - \frac{a_3}{r_p^3} \sin 3\theta_p - \frac{a_4}{r_p^4} \sin 4\theta_p - \frac{a_5}{r_p^5} \sin 5\theta_p \right)$$

2次元完全流体(有限要素法)

-1 循環流(PC 実演)

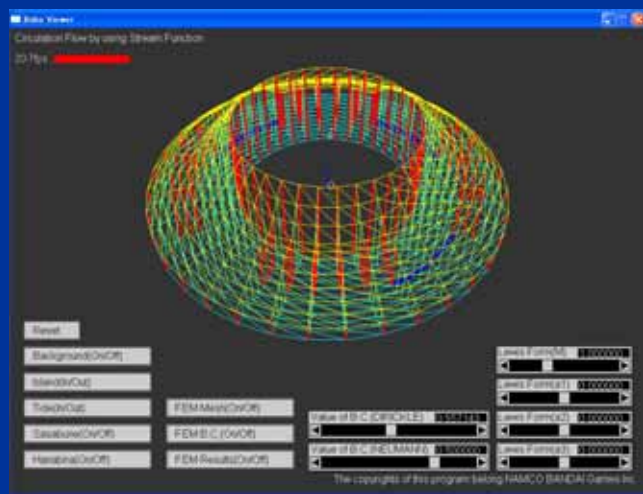
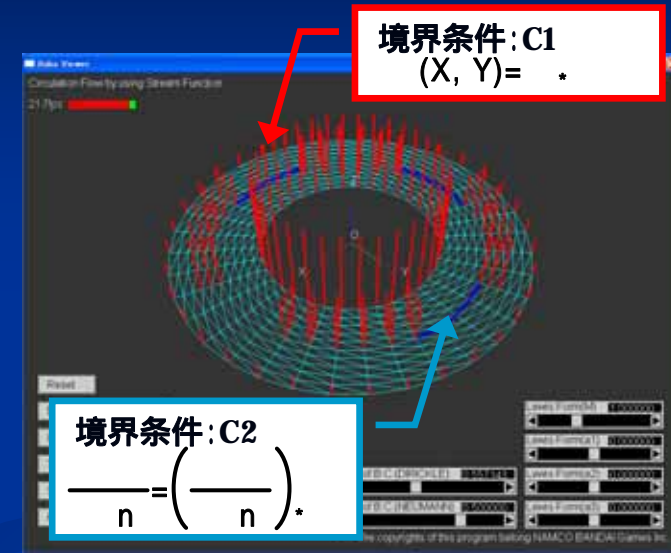
流れ関数: による流れ場の定式化

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (X, Y) \in D$$

$$\psi(x, y) = \psi_0 \quad (X, Y) \in C_1$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_0 \quad (X, Y) \in C_2$$

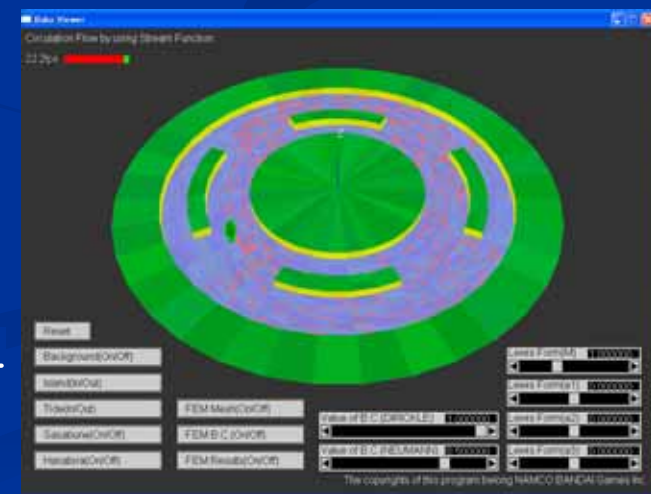
有限要素法による流れ場の解法



流れ場の
シミュレーション



$$V_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V_y = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$



2次元完全流体(有限要素法)

-2 循環流(流れ関数の理論式)

流れ関数: $\psi = \psi(X, Y)$ による、流れ場の定式化

(1) 流れ関数: ψ による、速度: $V(V_x, V_y)$ の定義:

$$V_x = -\frac{\partial \psi}{\partial Y}, V_y = \frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (1)$$

(2) 流体の連続条件: $\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = 0$

$$\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = 0 \quad (2)$$

となり、流れ関数: ψ は、流体の連続条件: $\frac{\partial V_x}{\partial X} + \frac{\partial V_y}{\partial Y} = 0$ を満足する。

(3) 完全流体の渦なし流れ条件: $\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} = 0$

流れ関数: ψ は、完全流体の渦なし流れ条件: $\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} = 0$ から

$$\frac{\partial V_y}{\partial X} - \frac{\partial V_x}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = 0 \quad (3)$$

となり、流れ関数: $\psi = \psi(X, Y)$ は、ラプラスの式: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = 0$ を満足する必要がある。

(4) 流れ関数: ψ による、流線の表現:

流れ関数: $\psi = \text{const.}$ は、

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial X}dX + \frac{\partial \psi}{\partial Y}dY = -V_y dX + V_x dY = 0$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{V_y}{V_x} \quad (4)$$

となり、流れに沿った流線をあらわす。

(5) 流れ関数: ψ による、流量の表現:

2本の流線の間の流量: dq は、

$$dq = V_x dY - V_y dX = \frac{\partial \psi}{\partial Y}dY + \frac{\partial \psi}{\partial X}dX = d\psi \quad (5)$$

となるため、流れ関数: ψ (Z)の差が流量をあらわす。

流れ関数: ψ による、流れ場の表現

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = 0 \quad (X, Y) \in D$$

$$\psi(X, Y) = \psi_0(X, Y) + \sum_{i=1}^n C_i \psi_i(X, Y)$$

$$\psi_i(X, Y) = \frac{1}{n} \left(\frac{X^2}{n} + \frac{Y^2}{n} \right)$$

$$\psi_0(X_0, Y_0) = \frac{(X-X_0)(X-X_1)(Y-Y_0)(Y-Y_1)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)(Y_0-Y_1)(Y_0-Y_2)}$$

$$+ \psi_1(X_1, Y_1) = \frac{(X-X_2)(X-X_3)(Y-Y_2)(Y-Y_3)}{(X_1-X_2)(X_1-X_3)(Y_1-Y_2)(Y_1-Y_3)}$$

$$+ \psi_2(X_2, Y_2) = \frac{(X-X_3)(X-X_0)(Y-Y_3)(Y-Y_0)}{(X_2-X_3)(X_2-X_0)(Y_2-Y_3)(Y_2-Y_0)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = \psi_0(X_0, Y_0) \frac{(2X-X_1-X_2)(Y-Y_1)(Y-Y_2)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)(Y_0-Y_1)(Y_0-Y_2)}$$

$$+ \psi_1(X_1, Y_1) \frac{(2X-X_2-X_3)(Y-Y_2)(Y-Y_3)}{(X_1-X_2)(X_1-X_3)(Y_1-Y_2)(Y_1-Y_3)}$$

$$+ \psi_2(X_2, Y_2) \frac{(2X-X_3-X_0)(Y-Y_3)(Y-Y_0)}{(X_2-X_3)(X_2-X_0)(Y_2-Y_3)(Y_2-Y_0)}$$

$$= -V_y$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = \psi_0(X_0, Y_0) \frac{(X-X_1)(X-X_2)(2Y-Y_1-Y_2)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)(Y_0-Y_1)(Y_0-Y_2)}$$

$$+ \psi_1(X_1, Y_1) \frac{(X-X_2)(X-X_3)(2Y-Y_2-Y_3)}{(X_1-X_2)(X_1-X_3)(Y_1-Y_2)(Y_1-Y_3)}$$

$$+ \psi_2(X_2, Y_2) \frac{(X-X_3)(X-X_0)(2Y-Y_3-Y_0)}{(X_2-X_3)(X_2-X_0)(Y_2-Y_3)(Y_2-Y_0)}$$

$$= V_x$$

2次元完全流体(有限要素法)

-3 循環流(有限要素法の理論式)

有限要素法

(偏微分方程式の境界値問題を変分問題に帰着させ、変分問題を近似的に解く方法)

微分方程式の境界値問題

下記の偏微分方程式の境界値問題を考える。

$$\frac{\partial}{\partial X} \left\{ P(X, Y) \frac{\partial}{\partial X} \right\} + \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ P(X, Y) \frac{\partial}{\partial Y} \right\} - Q(X, Y) = F(X, Y) \quad (1)$$

$$\text{境界条件: } (X, Y) \in C_1, \quad \frac{\partial}{\partial n} P(X, Y) = \phi_0(X, Y), \quad (X, Y) \in C_2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} P(X, Y) + A(X, Y) = B(X, Y), \quad (X, Y) \in C_2 \quad (3)$$

上式で、

D: 平面領域

C₁: 平面領域Dの境界(部分)

C₂: 平面領域Dの境界(部分)

P(X, Y): 平面領域Dにおける既知関数

Q(X, Y): 平面領域Dにおける既知関数

F(X, Y): 平面領域Dにおける既知関数

φ₀(X, Y): 境界C₁での既知関数

A(X, Y): 境界C₂での既知関数

B(X, Y): 境界C₂での既知関数

変分問題

(1)、(2)、(3)式に示す偏微分方程式の境界値問題は、(2)式の境界条件を満たす (X, Y)

C²の中で、下記の汎関数を最小にする変分問題に帰着される。

$$J[P] = \frac{1}{2} \int_D \left[P(X, Y) \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right\} + Q(X, Y) P^2 + 2F(X, Y) P \right] dX dY \\ + \int_{C_2} \left\{ \frac{1}{2} P(X, Y) A(X, Y) P^2 - P(X, Y) B(X, Y) \right\} dS \quad (4)$$

(証明略)

有限要素法

Ritz法により、(4)式の変分問題の解 (X, Y)を、下記のように一次結合式で近似する。

$$P(X, Y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(X, Y) \quad (5)$$

ここで、α_jは未知パラメータ、φ_j(X, Y)は基底関数である。

基底関数 φ_j(X, Y)は、下記の条件を満たすものとする。

$$\phi_j(X, Y) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (6)$$

(2)式が、C₁上の節点P_i(X_i, Y_i)について成立するものとみなすと

$$\phi_j(X_i, Y_i) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (7)$$

(7)式を満たす (X, Y)のなかで、(4)式の汎関数J []を最小にする未知パラメータ α_jをRitz法により求める。(5)式を(4)式に代入する。

$$J \left[\sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j \right] = \frac{1}{2} \int_D \left[P(X, Y) \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial Y} \right)^2 \right\} + Q(X, Y) P^2 + 2F(X, Y) P \right] dX dY \\ + \int_{C_2} \left\{ \frac{1}{2} P(X, Y) A(X, Y) P^2 - P(X, Y) B(X, Y) \right\} dS \quad (8)$$

(8)式のJ []を最小にする必要条件は、

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = \int_D \left[P(X, Y) \left\{ \frac{\partial P}{\partial X} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial X} \right) + \frac{\partial P}{\partial Y} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial Y} \right) \right\} + Q(X, Y) P \phi_i + F(X, Y) \phi_i \right] dX dY \\ + \int_{C_2} \left\{ P(X, Y) A(X, Y) \phi_i P - P(X, Y) B(X, Y) \phi_i \right\} dS \\ = \int_D \left[P(X, Y) \left(\frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial \phi_i}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\partial \phi_i}{\partial Y} \right) + Q(X, Y) P \phi_i \right] dX dY \\ + \int_{C_2} \left[P(X, Y) A(X, Y) \phi_i P - P(X, Y) B(X, Y) \phi_i \right] dS \\ + \int_D F(X, Y) \phi_i dX dY - \int_{C_2} \{ P(X, Y) B(X, Y) \phi_i \} dS \quad (9)$$

となり、(4)式の汎関数J []を最小にする未知パラメータ α_jは、次の連立一次方程式の解である。

$$[K_{ij}] (\alpha_j) = G_i$$

$$K_{ij} = \int_D \left[P(X, Y) \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial X} \frac{\partial \phi_j}{\partial X} + \frac{\partial \phi_i}{\partial Y} \frac{\partial \phi_j}{\partial Y} \right\} + Q(X, Y) \phi_i \phi_j \right] dX dY \\ + \int_{C_2} \left[P(X, Y) A(X, Y) \phi_i \phi_j \right] dS$$

$$G_i = \int_D F(X, Y) \phi_i dX dY + \int_{C_2} \{ P(X, Y) B(X, Y) \phi_i \} dS$$

3次元完全流体

-1 Vortex Ring(PC実演)

渦糸による誘起速度: dW_p (Biot-Savartの定理)

$$dW_p = \frac{(\sin \beta)^3 dS_i \times r_{pi}}{4 (r_{RANKINE})^3}$$

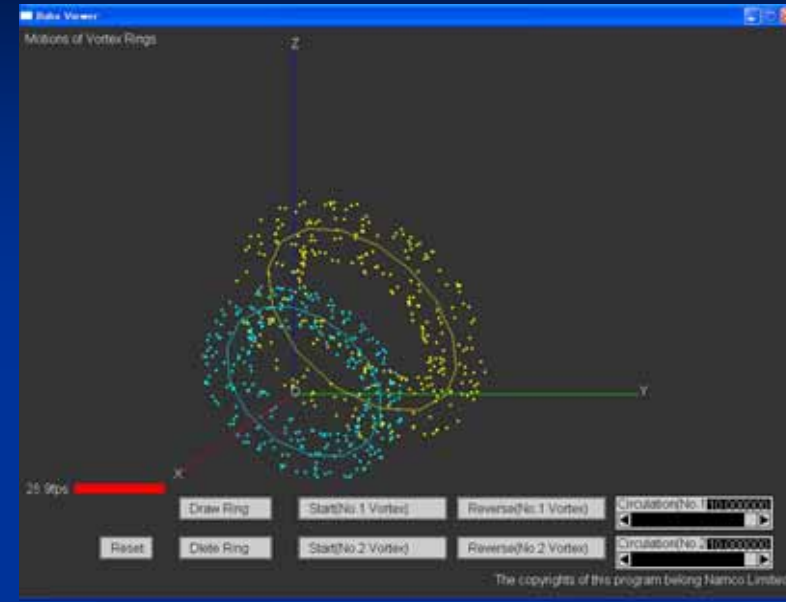
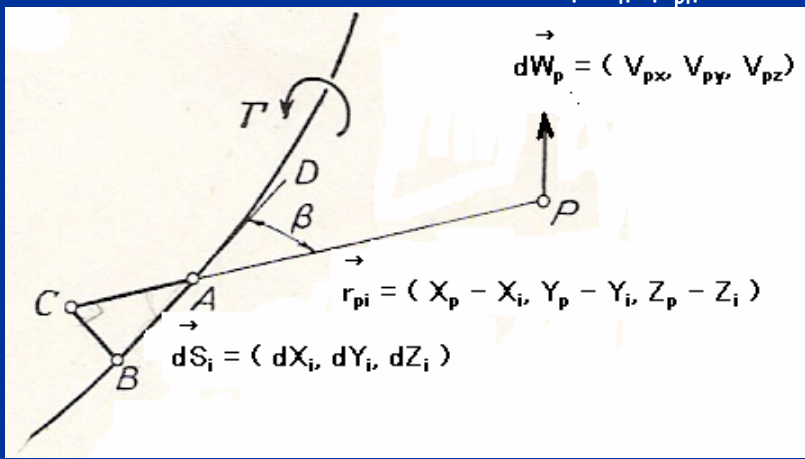
$$dW_p = \frac{dS_i \times r_{pi}}{4 (r)^3}$$

ただし、 Γ : 渦糸の強さ

r_{pi} : 渦糸までの距離 $r_{pi} = (X_p - X_i, Y_p - Y_i, Z_p - Z_i)$

dS_i : 渦糸の微小部分 $dS_i = (dX_i, dY_i, dZ_i)$

β : 渦糸の方向角 $\sin \beta = \frac{dS_i \times r_{pi}}{|dS_i| \cdot |r_{pi}|}$



空気砲 (Vortex Ring) の実験より
 出典: 宮田 佳則 (新潟高校)
<http://www.info-niigata.or.jp/~ymiyata/genshi/e12smoke.htm>

3次元完全流体

-2 Vortex Ring (理論式)

渦系による誘起速度: dW_p (Biot-Savartの定理)

$$0 \quad r_{pi} \quad \Gamma_{RANKINE} \quad dW_p = \frac{(\sin \beta)^3 dS_i \times r_{pi}}{4 (\Gamma_{RANKINE})^3}$$

$$\Gamma_{RANKINE} \quad r_{pi} \quad dW_p = \frac{dS_i \times r_{pi}}{4 (r)^3}$$

ただし、 β : 渦系の方向角

r_{pi} : 渦系までの距離 $r_{pi} = (X_p - X_i, Y_p - Y_i, Z_p - Z_i)$

dS_i : 渦系の微小部分 $dS_i = (dX_i, dY_i, dZ_i)$

β : 渦系の方向角 $\sin \beta = \frac{dS_i \times r_{pi}}{|dS_i| \cdot |r_{pi}|}$

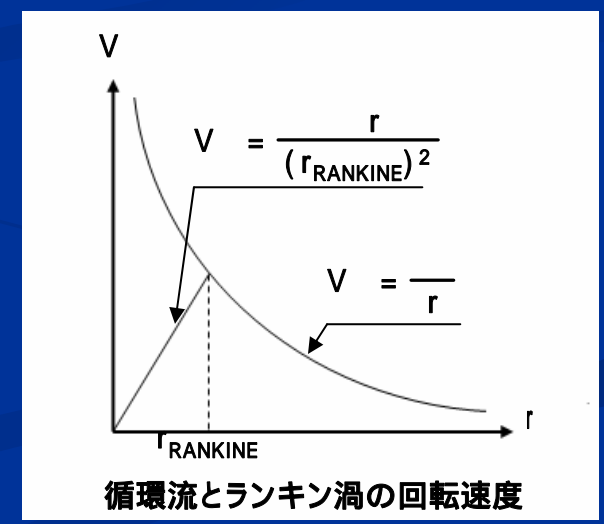
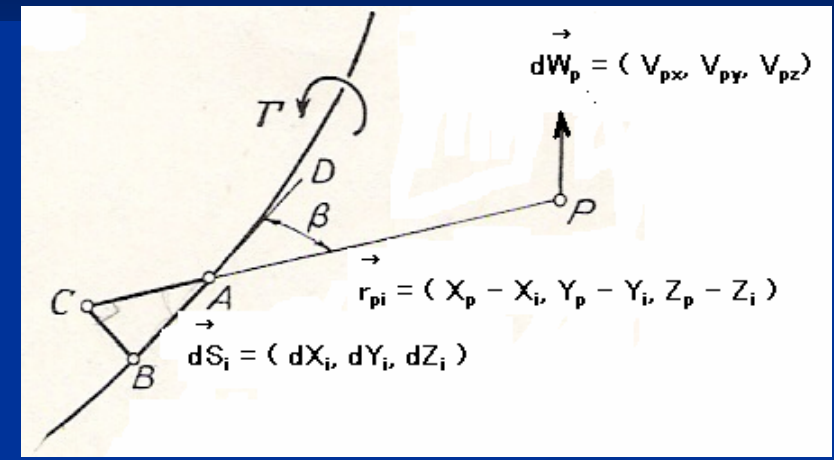
$$dW_p = (V_{px}, V_{py}, V_{pz})$$

$$0 \quad r_{pi} \quad \Gamma_{RANKINE} \quad dW_p = \frac{(\sin \beta)^3}{4 (\Gamma_{RANKINE})^3}$$

* $[dX_i(Z_p - Z_i) - dZ_i(Y_p - Y_i), dZ_i(X_p - X_i) - dX_i(Z_p - Z_i), dX_i(Y_p - Y_i) - dY_i(X_p - X_i)]$

$$\Gamma_{RANKINE} \quad r_{pi} \quad dW_p = \frac{1}{4 (r)^3}$$

* $[dX_i(Z_p - Z_i) - dZ_i(Y_p - Y_i), dZ_i(X_p - X_i) - dX_i(Z_p - Z_i), dX_i(Y_p - Y_i) - dY_i(X_p - X_i)]$



2次元粘性流体 (Navier・Stokes方程式)

-1 流体ミニゲーム (ビデオ上映)

下記の2式(連続の式、Navier・Stokes方程式)は、非線形連立変微分方程式で解析的には解けない

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}$$

Mac法に従い、圧力: Pに関するPoisson方程式に変形してから、Navier・Stokes方程式を時間的に数値積分していく

$$P_t = -\nabla \cdot (\mathbf{V}_t \cdot \nabla) \mathbf{V}_t + \frac{D_t}{t}$$

$$\frac{\mathbf{V}_{t+\Delta t} - \mathbf{V}_t}{\Delta t} + (\mathbf{V}_t \cdot \nabla) \mathbf{V}_t = -\nabla P_t + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V}_t$$



ミニゲーム (SwiQ)



ミニゲーム (JetFinger)

2次元粘性流体 (Navier・Stokes方程式)

- 2 流体ミニゲーム (理論式)

・ Navier-Stokes方程式

水のような流動する連続体を表現する方程式は Navier-Stokes 方程式と呼ばれ次式で与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + (\nabla \cdot \mathbf{T}) = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{V} は流速 (V_x, V_y, V_z)、 P は圧力、 ρ は密度、 μ は流体の動粘性係数である。また、 ∇ はnabla(スカラー関数の勾配)、 ∇^2 はlaplacian (Laplaceの演算子)を表す。

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4)$$

(1)式は「連続の式」と呼ばれ質量保存則を表す。また、(2)式は運動量保存則を表す。

流れを表す代表量として、長さを L 、速度を U 、圧力 P_0 を用いて、(1)、(2)式を以下のように無次元化する。

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{V}}}{dt} + (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{T}}) = -\tilde{\nabla} P + \frac{\mu}{\rho U L} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{V}} \quad (6)$$

ここで、

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \tilde{y} = \frac{y}{L}, \tilde{z} = \frac{z}{L}$$

$$\tilde{V}_x = \frac{V_x}{U}, \tilde{V}_y = \frac{V_y}{U}, \tilde{V}_z = \frac{V_z}{U} \quad (7)$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/U}, \tilde{P} - P_0 = \frac{P - P_0}{\rho U^2}$$

$$\tilde{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{y}}, \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \right) \quad (8)$$

$$\tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \quad (9)$$

(5)、(6)式において、 UL/μ が同じであれば、長さ、速度、動粘性係数が異なっても、同じ運動方程式となる。 UL/μ は Reynolds数 (Re と表記する)と呼ばれ、流れの相似則に用いられるパラメータである。

(5)、(6)式で表されるNavier-Stokes 方程式の特徴をあげる。

- ・左辺第2項が非線形となった楕円型偏微分方程式
- ・速度 \mathbf{V} については時間変化項があるが、圧力 P については時間変化項がない。

このため、Navier-Stokes 方程式を解析的に解くことが困難となっている。

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式を数値的に解く方法として次の4種類がある。

圧力を消去する方法

圧力を独立に求める方法

擬似的な圧縮性を導入する方法

連続の式、Navier-Stokes 方程式を同時連立させて解く方法

本セミナーでは、この方法 (Mac法) を用いた。

2次元粘性流体 (Navier・Stokes方程式)

-3 流体ミニゲーム(理論式)

Mac法による、Navier-Stokes 方程式の数値解法について述べる。

(6)式において、両辺のnabla(スカラー関数の勾配)をとる。ただし、無次元量を表す”~”は省略している。

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{V})$$

ここで、

$$\nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \nabla \cdot \{ (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{x} \times \mathbf{x} \cdot \nabla \} = (\nabla \cdot \mathbf{V})$$

$$\mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{V}$$

を用いると、

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \mathbf{D}$$

となる。

連続の式(1)式によれば、 $\mathbf{D} = 0$ となるが、(13)式を差分化して解く際、離散化誤差が集積して \mathbf{D} が大きくなるように、以下のような手続きをとる。

(13)式について、時間 t についての漸近式で表す。

$$\frac{\mathbf{D}_{t+\Delta t} - \mathbf{D}_t}{\Delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_t \cdot \nabla) \mathbf{V}_t = -\nabla P_t + \frac{1}{Re} \mathbf{D}_t$$

(14)式において、 Δt が0に近く、また、 Re が十分大きいと考えられるので、 $1/Re \cdot \mathbf{D}_t = 0$ とみなす。

その時、(14)式において、 $\mathbf{D}_{t+\Delta t} = 0$ となるためには

$$-\frac{\mathbf{D}_t}{\Delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_t \cdot \nabla) \mathbf{V}_t = -\nabla P_t$$

が、圧力 P についての条件式となる。

以上、水のような流動する連続体を表現する方程式は、次式を解くこととなる。

$$\nabla P_t = -\nabla \cdot (\mathbf{V}_t \cdot \nabla) \mathbf{V}_t + \frac{\mathbf{D}_t}{\Delta t} \tag{10}$$

$$\frac{\mathbf{V}_{t+\Delta t} - \mathbf{V}_t}{\Delta t} + \nabla \cdot (\mathbf{V}_t \cdot \nabla) \mathbf{V}_t = -\nabla P_t + \frac{1}{Re} \mathbf{V}_t \tag{17}$$

$$\tag{11}$$

$$\tag{12}$$

(16)式は、圧力 P に関するPoissonの方程式であり、時間 t における速度 \mathbf{V}_t の分布が分かれば、圧力 P の分布が分かる。また、(17)式により、時間 t における速度 \mathbf{V}_t の分布と圧力 P の分布が分かれば、時間 $t+\Delta t$ における速度 $\mathbf{V}_{t+\Delta t}$ の分布が分かることとなる。

$$\tag{13}$$

3次元粘性流体 (Navier-Stokes方程式)

-1 竜巻のシミュレーション (PC実演)

Rotation near the GroundのNavier-Stokes方程式:

(出典: Boundary-Layer Theory by Dr. Hermann Schlichting)

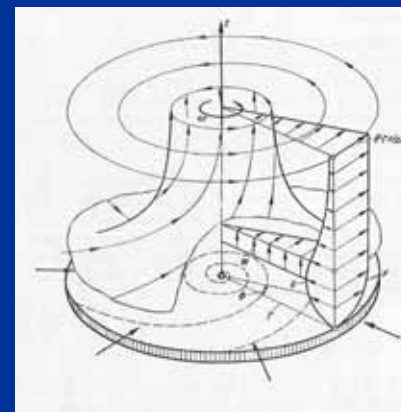
(注) 厳密解が得られる稀有なNavier-Stokes方程式

1) Navier-Stokesの方程式

$$V_r \frac{V_r}{r} + V_z \frac{V_r}{z} - \frac{V^2}{r} = -\frac{1}{r} \frac{p}{r} + \left\{ \frac{2V_r}{r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{V_r}{r} \right) + \frac{2V_r}{z^2} \right\}$$

$$V_r \frac{V}{r} + V_z \frac{V}{z} + \frac{V_r V}{r} = \left\{ \frac{2V}{r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{V}{r} \right) + \frac{2V}{z^2} \right\}$$

$$V_r \frac{V_z}{r} + V_z \frac{V_z}{z} = -\frac{1}{z} \frac{p}{z} + \left\{ \frac{2V_z}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{V_z}{r} + \frac{2V_z}{z^2} \right\}$$



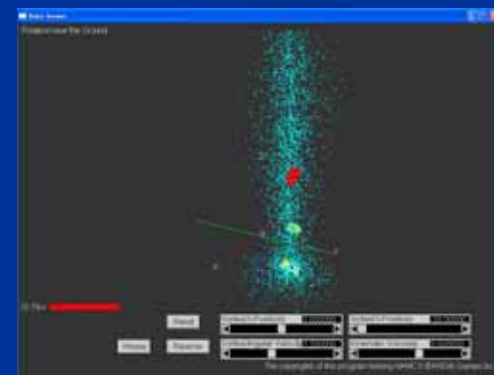
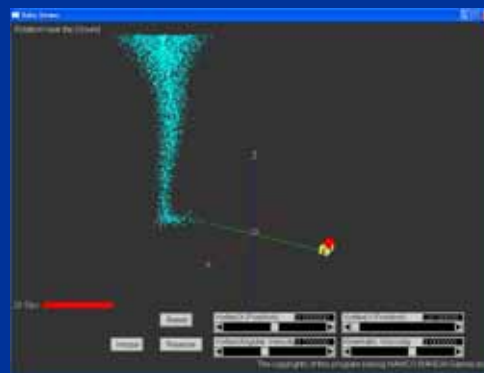
2) 連続の式

$$\frac{V_r}{r} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_z}{z} = 0$$

3) 境界条件

at $z = 0$: $V_r = 0, V_\theta = 0, V_z = 0$

at $z = \infty$: $V_r = 0, V_\theta = r$



3次元粘性流体(Navier-Stokes方程式)

-2 竜巻のシミュレーション(理論式)

地上近傍で中心に巻き込む流れがあり、巻き上がっていく流体のNavier-Stokesの方程式は次式で与えられる。

1) Navier-Stokesの方程式

$$\begin{aligned} V_r \frac{V_r}{r} + V_z \frac{V_r}{z} - \frac{V^2}{r} &= -\frac{1}{r} \frac{p}{r} + \left\{ \frac{2V_r}{r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{V_r}{r} \right) + \frac{2V_r}{z^2} \right\} \\ V_r \frac{V_r}{r} + V_z \frac{V_r}{z} + \frac{V_r V}{r} &= \left\{ \frac{2V}{r^2} + \frac{1}{r} \left(\frac{V}{r} \right) + \frac{2V}{z^2} \right\} \\ V_r \frac{V_z}{r} + V_z \frac{V_z}{z} &= -\frac{1}{z} \frac{p}{z} + \left\{ \frac{2V_z}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{V_z}{r} + \frac{2V_z}{z^2} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

2) 連続の式

$$\frac{V_r}{r} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_z}{z} = 0 \quad (2)$$

3) 境界条件

$$\begin{aligned} \text{at } z = 0 : V_r = 0, V = 0, V_z = 0 \\ \text{at } z = \infty : V_r = 0, V = r \end{aligned} \quad (3)$$

(1)、(2)、(3)式において、

r, θ, z は、半径方向、回転方向、鉛直方向の座標
 V_r, V_θ, V_z は、半径方向、回転方向、鉛直方向の速度
 ω は、巻き込む流体の回転角速度

次に、以下の無次元座標を導入する。

$$r = z \sqrt{\left(\frac{r}{z} \right)^2} \quad (4)$$

ここで、 ν は動粘性係数

流速 u, v, w を、(4)式で定義した無次元座標を用いた関数 $F(\eta), G(\eta), H(\eta)$ を使って次のように表現する。

$$\begin{aligned} V_r &= r F(\eta) \\ V_\theta &= r G(\eta) \\ w &= \sqrt{z} H(\eta) \end{aligned} \quad (5)$$

半径方向の圧力の変化は、地上から離れた点での粘性のない流れの圧力変化を用いる。

$$\frac{1}{r} \frac{p}{r} = \frac{V^2}{r} = r^{-2} \quad (6)$$

以上、(5)、(6)式を用いて、(1)、(2)、(3)式を書き直すと、次式が得られる。

$$\begin{aligned} F^2 - G^2 + H \frac{dF}{d\eta} - \frac{d^2 F}{d\eta^2} + 1 &= 0 \\ 2GF + H \frac{dG}{d\eta} - \frac{d^2 G}{d\eta^2} &= 0 \\ 2F + \frac{dH}{d\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{at } \eta = 0 : F = 0, G = 0, H = 0 \\ \text{at } \eta = \infty : F = 0, G = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

(7)、(8)式を多項式近似して得られた結果をテーブルに示す。

	F()	G()	H()
0.000	0.000	0.000	0.000
0.500	-0.343	0.382	0.190
1.000	-0.468	0.731	0.614
1.500	-0.437	1.004	1.076
2.000	-0.318	1.175	1.460
2.500	-0.171	1.246	1.704
3.000	-0.038	1.242	1.800
3.500	0.056	1.192	1.784
4.000	0.106	1.123	1.702
4.500	0.117	1.056	1.590
5.000	0.103	1.003	1.478
5.500	0.074	0.969	1.390
6.000	0.041	0.954	1.332
6.500	0.013	0.953	1.308
7.000	-0.010	0.959	1.304
7.500	-0.020	0.975	1.320
8.000	-0.023	0.990	1.340
8.500	-0.020	1.000	1.364
9.000	-0.013	1.007	1.382
9.500	-0.006	1.010	1.390
10.000	0.000	1.009	1.390
10.500	0.003	1.007	1.386
11.000	0.004	1.005	1.382
11.500	0.003	1.002	1.380
12.000	0.001	1.000	1.380
12.500	0.000	1.000	1.380
	0.000	1.000	1.380

海洋波

-1 短波頂不規則波のシミュレーション(PC実演)

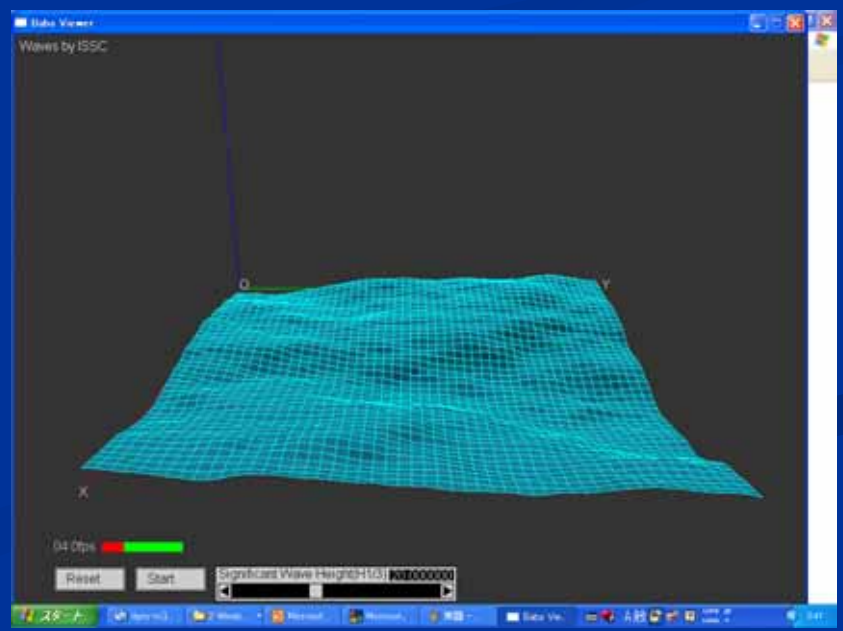
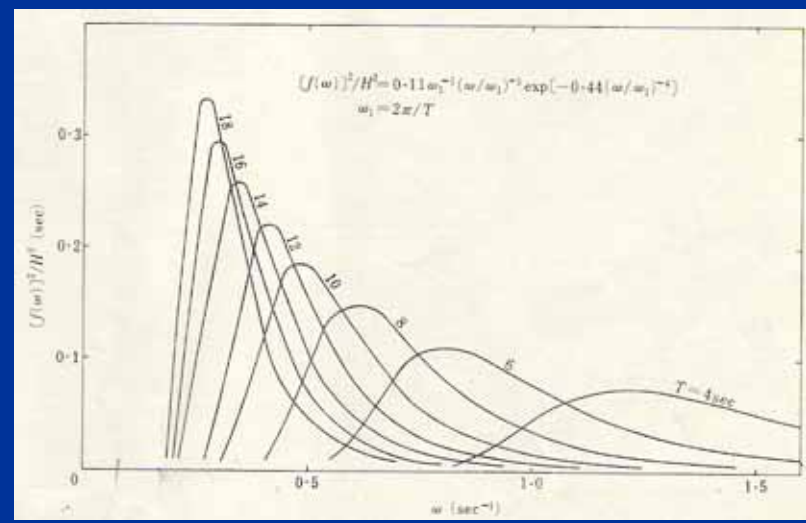
短波頂不規則波スペクトラム

$$[f(\omega, \theta)]^2 = k [f(\omega)]^2 \cos^n \left(\frac{\theta - \theta_0}{\Delta\theta} \right)$$

$[f(\omega, \theta)]^2 = 0$ (その他の場合)
 k及びnは定数で、ITTCでは暫定的に $k = \frac{2}{\Delta\theta^2}$, $n = 2$

ISSCの海洋波スペクトラル (International Ship Structure Congress)

$$[f(\omega)]^2 = 0.11 H^2 \omega_1^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^{-5} \text{EXP} \left[-0.44 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \right]^{-4}$$



ISSCの海洋波スペクトラル
 出典: 造船設計便覧

海洋波

-2 短波頂不規則波のシミュレーション(理論式)

1) 短波頂不規則波スペクトラム: $[f(\omega, \theta)]^2$

$$[f(\omega, \theta)]^2 = k [f(\omega)]^2 \cos^n \left(\frac{\theta - \theta_0}{\frac{\pi}{2}} \right) \quad (1)$$

$$[f(\omega, \theta)]^2 = 0 \quad \left(\frac{\theta - \theta_0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \right)$$

ここで、 ω : 波振動数[1/sec]
 θ : 成分波の入射角[rad]
 $k = \frac{2}{\omega^2}$, $n = 2$ (ITTCの暫定案)

$[f(\omega)]^2$: 海洋波スペクトラム

ISSC (International Ship Structure Congress)

$$[f(\omega)]^2 = 0.11 H^2 \omega_1^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^{-5} \text{EXP} \left[-0.44 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \right]^{-4} \quad (2)$$

ここで、H: 有義波高[m]
 T_w : 平均波周期[sec] ($T_w = 3.86\sqrt{H}$)

$$\omega_1 = \frac{2}{T_w} \quad (T_w: \text{平均波周期[sec]})$$

ITTC (International Towing Tank Conference)

$$[f(\omega)]^2 = \frac{A}{5} \text{EXP} \left[\frac{-B}{4} \right] \quad (3)$$

ここで、 $A = 8.10 \times 10^{-3} \times g^2$ ($g = 9.8 \text{ m/s}^2$)
 $B = 3.11 / H^2$
H: 有義波高[m]

2) 短波頂不規則波 (ISSCの海洋波スペクトラム)

$$(X, Y, t) = \sum_{i=0}^{i=N} \sum_{j=0}^{j=N} A_{ij} \cos(\omega_i t + L_{ij} X + M_{ij} Y + \phi_{ij}) \quad (4)$$

ここで、 (X, Y, t) : 短波頂不規則波の波形状

A_{ij} : 不規則波の成分波の半波高

$$A_{ij} = \sqrt{2.0 \times [f(\omega, \theta)]^2}$$

$$= \sqrt{2.0 \times 0.11 H^2 \omega_1^{-1} \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^{-5} \text{EXP} \left[-0.44 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \right]^{-4} \frac{2}{\cos^2}} \quad (5)$$

ω_1 : 短波頂不規則波の波振動数

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{\omega_1}{N_w} \times i \quad (6)$$

ω_0 : 短波頂不規則波スペクトラムの波振動数の分割区間

$$= \frac{N_w - \omega_0}{N_w} \quad (N_w: \text{最大波振動数}, \omega_0: \text{最小波振動数}, N_w: \text{分割数})$$

θ_1 : 短波頂不規則波の入射角

$$\theta_j = \theta_{\min} + \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{N} \times j \quad (7)$$

θ_{\min} : 短波頂不規則波スペクトラムの入射角の分割区間

$$= \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{N} \quad (\theta_{\max}: \text{最大入射角}, \theta_{\min}: \text{最小入射角}, N: \text{分割数})$$

L_{ij}, M_{ij} : 短波頂不規則波のX, Y方向の波数

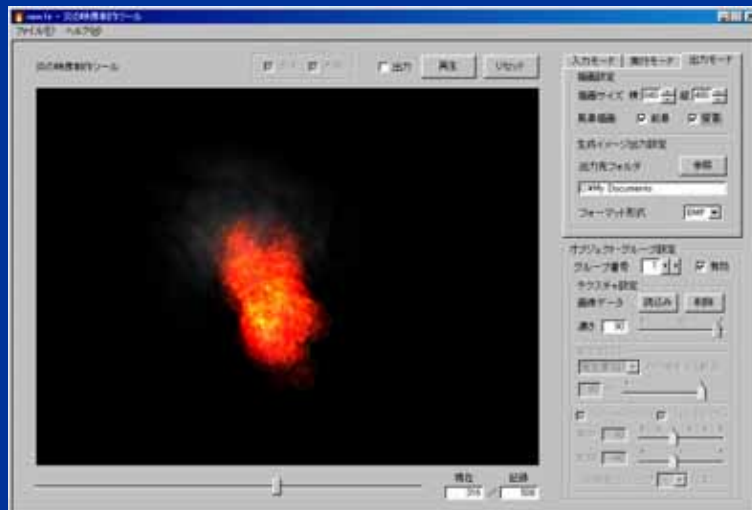
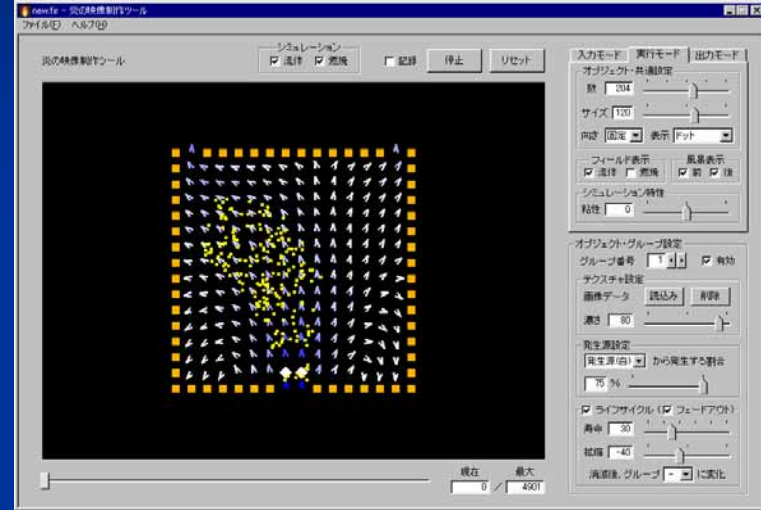
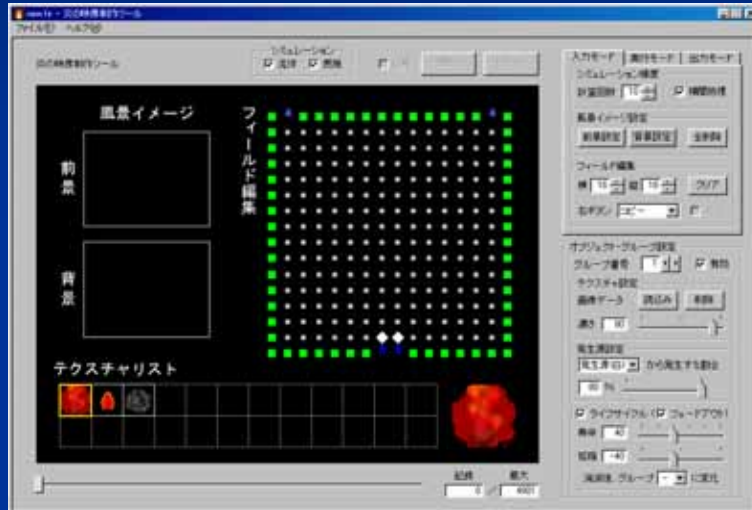
$$L_{ij} = K_i \cos(\theta_j) = \frac{2}{g} \omega_i \cos(\theta_j) = \frac{(\omega_0 + \frac{\omega_1}{N_w} \times i)^2}{g} \cos(\theta_{\min} + \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{N} \times j)$$

$$M_{ij} = K_i \sin(\theta_j) = \frac{2}{g} \omega_i \sin(\theta_j) = \frac{(\omega_0 + \frac{\omega_1}{N_w} \times i)^2}{g} \sin(\theta_{\min} + \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{N} \times j) \quad (8)$$

ϕ_{ij} : 短波頂不規則波の位相(0~2πのランダム数)

複合現象(流体、混合、燃焼)

-1 炎と流体映像制作ソフト(PC 実演)



複合現象 (流体、混合、燃焼)

-2 炎と流体映像制作ソフト (理論式)

・ 非圧縮性流体運動方程式 (NS方程式)

$$P_t = - \rho (V_t \cdot \nabla) V_t + \frac{D_t}{t} \quad (2-1)式$$

$$\frac{V_{t+\Delta t} - V_t}{\Delta t} + (V_t \cdot \nabla) V_t = - \frac{1}{\rho} \nabla P_t + \frac{1}{Re} \nabla^2 V_t \quad (2-2)式$$

・ 燃焼方程式 (熱発生を伴う熱伝導方程式)

$$\frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} + (V_t \cdot \nabla) T_t = \frac{1}{Pe} \nabla^2 T_t + \tilde{T}_t \quad (3)式$$

・ 拡散方程式 (反応を伴う濃度方程式)

$$\frac{C_{t+\Delta t} - C_t}{\Delta t} + (V_t \cdot \nabla) C_t = \frac{1}{Pe} \nabla^2 C_t + \tilde{C}_t \quad (4)式$$

