

加速度センサの誤差測定

山口兼太郎*

(株) バンダイナムコゲームス

コンテンツ制作本部 制作ディビジョン 技術部 技術サポート課

2/Sep '09

1 誤差測定の必要性

近頃のゲーム機のコントローラや携帯電話には、入力用のデバイスとして、加速度センサが使われている。加速度センサには誤差(個体差)がある。そのため、加速度センサを使うアプリケーションを開発する際に、幾つかのコントローラで正しく動作することを確認しても、他のコントローラでの動作については不確かさが残る。

テストに使うコントローラの加速度センサの誤差が分かれば、センサ値を補正して使うことによって、誤差なしの状態や誤差最大の状態でのアプリケーションの動作確認テストができる。そこで、なるべく簡便で処理負荷の少ない、加速度センサの誤差測定方法について考える。

また誤差測定の別の使い方として、アプリケーションに誤差測定プログラムを組み込んでおき、起動時に誤差を測定することも考えられる。センサ値を補正して使うことによって、アプリケーションはセンサ誤差の影響を受けずにすむ。

2 誤差の意味

加速度センサに作用している真の加速度を T とする。 T は運動による加速度だけでなく、重力をも含んでいるとする。例えば、センサが静止している状態では、 $T = 1G$ である¹。「G」は加速度の単位で $1G = 9.80665 \text{ m/s}^2$ である。真の加速度 T に対して、センサで測定して得られた値が M であるとする。このとき、次式のように M と T の差を誤差 E とする。

$$E = M - T \quad (1)$$

誤差 E の大きさは T の値によって変わるので、 E は T の関数として表される。 T の 2 次以上の成分は僅かなので、次式のように E を T の 1 次式で近似する。

$$E = e_0 + e_1 T \quad (2)$$

$T = 0$ のとき誤差が $E = e_0$ となるので、 e_0 は 0G 誤差と呼ばれる。一方 e_1 は、センサの感度のずれに相当するので、感度誤差と呼ばれる。 $e_0 = 0, e_1 = 0$ が、誤差のない状態である。 M と T の関係は次式で表される。

$$M = e_0 + (1 + e_1) T \quad (3)$$

*Kentaro_Yamaguchi@bandainamcogames.co.jp

¹重力(重力加速度)の大きさは、厳密には緯度や標高等によって異なるが、その違いは僅かなので、ここでは一定の値であるとする。

3 加速度センサの誤差測定 (1 軸)

加速度センサの 1 軸 (x, y, z のうちの 1 つ) のみを対象として, 0G 誤差と感度誤差を測定する方法について考える。加速度センサの軸方向を真上または真下に向け, 静止状態でのセンサ出力を測定すれば, 以下のようにして誤差を求めることができる。

軸を真上に向けた静止状態での測定値を m_1 とする。この状態での真の加速度値は 1G なので, 式 (3) より次式が得られる。

$$m_1 = e_0 + (1 + e_1) \quad (4)$$

同様に, 軸を真下に向けた静止状態での測定値を m_2 とする。この状態での真の加速度値は $-1G$ なので, 式 (3) より次式が得られる。

$$m_2 = e_0 - (1 + e_1) \quad (5)$$

式 (4), (5) より e_0, e_1 を求めると, 次式のようになる。

$$e_0 = \frac{m_1 + m_2}{2} \quad (6)$$

$$e_1 = \frac{m_1 - m_2}{2} - 1 \quad (7)$$

e_0 の単位は G で, e_1 は単位なし (無次元) である。このように, 加速度センサの軸の向きを垂直方向に合わせることができれば, 誤差は容易に求められる。

加速度センサがゲームコントローラに内蔵されているものとする。コントローラの形状が箱型で, 面の向き (表面の法線の方向) が加速度センサの軸方向と一致している場合は, 誤差測定は容易に行なえる。水平面と見なせる面 (例えば机の上) にコントローラを置けば, 加速度センサの軸を垂直方向に合わせることができる。

しかし, コントローラの形状が曲面でできている場合や, コントローラの外形が加速度センサの軸方向と合っていない場合には, センサの軸を垂直方向に合わせる操作に手間が掛かる。例えば, コントローラを支えた状態で向きを調整して, 測定値が最大 (あるいは最小) になるような方向を探す等の操作が必要となる。

4 3 軸加速度センサの誤差測定 (任意方向)

4.1 楕円体の方程式

加速度センサの向きを気にせずに誤差測定できる方法について考える。3 軸加速度センサが搭載されたコントローラを, 様々な向きで静止させ, センサ出力値を調べるものとする。毎回向きを変えて N 回の測定を行ない, その結果の x, y, z 各軸の値を, それぞれ x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, N$) とする。ただし, 加速度の単位は G とする。

コントローラには 1G の重力のみが作用しているので, もし加速度センサに誤差がなければ, ベクトル (x_i, y_i, z_i) の大きさは 1 となる。したがって,

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1 \quad (8)$$

となり, N 個の測定値は全て, 原点を中心とする半径 1 の球面上に乗る。

これに対して, 加速度センサの誤差を考慮すると, 感度誤差によるスケール (拡大・縮小) と, 0G 誤差による平行移動が, x, y, z 各軸方向に加わる。そのため, 式 (8) の球ではなく, 次式のように

主軸が x, y, z 軸に平行な楕円体 (axis aligned ellipsoid) となる。ただし $a > 0, b > 0, c > 0$ とする。

$$\left(\frac{x_i - p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_i - q}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_i - r}{c}\right)^2 = 1 \quad (9)$$

中心座標 p, q, r がそれぞれ x, y, z 方向の 0G 誤差に相当し, $a-1, b-1, c-1$ がそれぞれ x, y, z 方向の感度誤差に相当する。この楕円体の式が決まれば, 加速度センサの誤差が得られたことになる。

4.2 方程式の解法

式 (9) の未知数は p, q, r, a, b, c の 6 個なので, 解が求まるためには 6 個の方程式が必要である。そこで, 6 個の測定値 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_6, y_6, z_6)$ を使って, 次のように連立方程式を作る。

$$\left(\frac{x_1 - p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - q}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_1 - r}{c}\right)^2 = 1 \quad (10a)$$

$$\left(\frac{x_2 - p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - q}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_2 - r}{c}\right)^2 = 1 \quad (10b)$$

$$\left(\frac{x_3 - p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - q}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_3 - r}{c}\right)^2 = 1 \quad (10c)$$

$$\left(\frac{x_4 - p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_4 - q}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_4 - r}{c}\right)^2 = 1 \quad (10d)$$

$$\left(\frac{x_5 - p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_5 - q}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_5 - r}{c}\right)^2 = 1 \quad (10e)$$

$$\left(\frac{x_6 - p}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_6 - q}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_6 - r}{c}\right)^2 = 1 \quad (10f)$$

この連立方程式は, 未知数 p, q, r, a, b, c の 2 次方程式なので, 解くのが困難である²。そこで, 以下のようにして連立 1 次方程式に帰着させる。

まず, 式 (10b) から式 (10a) を引いて変形すると, 次式が得られる。

$$2(x_1 - x_2)p + 2(y_1 - y_2)\frac{a^2}{b^2}q + 2(z_1 - z_2)\frac{a^2}{c^2}r - (y_1^2 - y_2^2)\frac{a^2}{b^2} - (z_1^2 - z_2^2)\frac{a^2}{c^2} = x_1^2 - x_2^2 \quad (11)$$

ここで, 未知数を次のように置き換える。

$$\alpha = p, \quad \beta = \frac{a^2}{b^2}q, \quad \gamma = \frac{a^2}{c^2}r, \quad \delta = \frac{a^2}{b^2}, \quad \epsilon = \frac{a^2}{c^2} \quad (12)$$

すると, 式 (11) は次式のように $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ の 1 次式となる。

$$2(x_1 - x_2)\alpha + 2(y_1 - y_2)\beta + 2(z_1 - z_2)\gamma - (y_1^2 - y_2^2)\delta - (z_1^2 - z_2^2)\epsilon = x_1^2 - x_2^2 \quad (13)$$

同様にして, 式 (10a) ~ (10f) の中から 2 つの式を選び, その差をとって 1 次式を作る。6 個の式から 2 個の式を選ぶので, ${}_6C_2 = 15$ とおりの式ができるが, そのうち独立なものは 5 個である (詳細は付録 A を参照)。この 5 元連立 1 次方程式を解くことにより $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ が求まる。

²文献 [1] では, ニュートン法を使って 6 元連立 2 次方程式の解を求めている。

測定値	測定時の向き	式番号
x_1, y_1, z_1	x 軸が上	(10a)
x_2, y_2, z_2	x 軸が下	(10b)
x_3, y_3, z_3	y 軸が上	(10c)
x_4, y_4, z_4	y 軸が下	(10d)
x_5, y_5, z_5	z 軸が上	(10e)
x_6, y_6, z_6	z 軸が下	(10f)

表 1: 測定時の加速度センサの向き

p, q, r は次式により得られる。

$$p = \alpha, \quad q = \frac{\beta}{\delta}, \quad r = \frac{\gamma}{\epsilon} \quad (14)$$

式 (10a) を変形すると次式が得られ、この式から a が求められる。

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 \delta + (z_1 - r)^2 \epsilon = a^2 \quad (15)$$

b, c は次式により得られる。

$$b = \sqrt{\frac{a^2}{\delta}}, \quad c = \sqrt{\frac{a^2}{\epsilon}} \quad (16)$$

以上の計算で求めた p, q, r が、それぞれ x, y, z 方向の 0G 誤差である。また、 $a-1, b-1, c-1$ がそれぞれ x, y, z 方向の感度誤差である。

4.3 計算精度の向上

6 個の測定値から誤差を求める計算は、3 次元空間上の 6 点を通る楕円体を求めることに相当する。そのため、計算結果の精度を良くするには、6 つの測定値 x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) は xyz 空間上で互いになるべく離れているほうが良いと、直観的に推測される。このことは、測定値が近接していると、式 (13) の係数の相対精度が低くなることから理解できる。

また、連立 1 次方程式を解くアルゴリズムは種々存在するが、その多く (Gauss の消去法, Gauss-Jordan 法, Gauss-Seidel 法等) は、係数行列の対角要素の値 (絶対値) が小さい場合に、解の精度の低下や、解が求まらないという不具合を生じる。そのため、連立 1 次方程式を作る際には、係数行列の対角要素が大きくなるように構成することが重要である。

そこで、 x_1, y_1, z_1 を測定する際には、加速度センサの x 軸がほぼ上方向を向くようにする。同様に、表 1 のように 6 回の測定を、それぞれ向きを変えて行なう。向きは正確である必要はない。このように設定することで、6 個の測定値は xyz 空間上で互いに十分離れた位置になる。また、各測定値は概ね次のような値になる。

$$\begin{aligned} x_1 &\approx 1, \quad x_2 \approx -1, \quad \text{other } x_i \approx 0 \\ y_3 &\approx 1, \quad y_4 \approx -1, \quad \text{other } y_i \approx 0 \\ z_5 &\approx 1, \quad z_6 \approx -1, \quad \text{other } z_i \approx 0 \end{aligned} \quad (17)$$

そこで、連立 1 次方程式を次のように構成する。

$$\begin{cases} (10a) - (10b) \\ (10c) - (10d) \\ (10e) - (10f) \\ (10a) - (10c) + (10b) - (10d) \\ (10a) - (10e) + (10b) - (10f) \end{cases} \quad (18)$$

すると、係数行列 M は概ね次のような値になり、対角要素が他の要素よりも大きい値になる。

$$M \approx \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

この係数行列を使うことにより、連立 1 次方程式を安定して精度良く解くことができる。

5 静止状態の検出

以上の方法を使って加速度センサの誤差を測定する場合、測定時に加速度センサを静止させる必要がある。本来は、加速運動をしていなければよいので、等速直線運動は許容されるが、現実的には静止させるほうが容易である。

測定値が殆んど変動しない状態が一定時間持続した場合に、静止していると判定する。厳密には、この判定基準は正しくない。本来は、加速運動していない状態（静止状態を含む）のみ OK 判定を出すべきところを、等加速度運動していても OK になってしまうからである。しかし実際には、もし等加速度運動がある程度持続すればその方向に移動するはずなので、移動していないと確認できる状態（机の上に置いた状態等）であれば、この判定方法で問題はない。

実際の例としては、測定値の変動幅が 0.03G 以下の状態が 1 秒間持続した場合に、静止していると判断する。そして、この 1 秒間の測定値を平均した値を 1 個の測定値 (x_i, y_i, z_i) として扱う。また、このように平均をとることによって、ランダムなノイズやセンサの丸め誤差の影響を減らし、測定値の信頼度を上げることができる。

6 測定点の個数

以上で述べたように、楕円体を求める際に、6 個の測定点（測定値）を使って、楕円体がこの 6 点を通るという条件を設定した。一方、測定点の個数を 7 個以上にして、楕円体と測定点との距離の 2 乗和を最小にするという条件設定も可能である [2]。

個々の測定点の信頼度が低い場合には、多数の測定点を用いる方法は、結果の信頼度を高めるのに効果的である。しかし、前節で述べたように、ある一定時間の測定値を平均したものを 1 個の測定点とすれば、個々の測定点の信頼度は高くなる。そのため、6 個の測定点から得られた結果であっても、信頼度は高いと考えられる。

7 まとめ

加速度センサの向きを変えて重力加速度を 6 回測定し、その測定値から楕円体の方程式を求めることにより、加速度センサの誤差を算出した。この方法を使えば、誤差を測定する際に、センサの向きの制約がなくなるので、測定作業が容易になる。また、計算の主要部分は 5 元連立 1 次方程式を解く処理なので、計算負荷も軽い。

付録 A 独立な連立 1 次方程式の構成

A.1 連立方程式とグラフ

連立方程式 (10a)~(10f) を解く際に、この 6 つの 2 次式の中から式を 2 つ選び、その差をとって 1 次式を作った。式の選び方は ${}_6C_2 = 15$ とおりあるので、15 個の 1 次式を作ることができる。しかし、そのうち独立なものは 5 個しかない。グラフ理論を使ってこのことを説明する。なお、式番号を見やすくするために、(10a),(10b),..., (10f) の代わりに、それぞれ (a),(b),..., (f) と書くことにする。

図 1 のように 6 個のノード (点) A,B,...,F を配置し、それぞれが 2 次式 (a),(b),..., (f) を意味するものとする。また、式 (a),(b),..., (f) を、それぞれノード A,B,...,F のノード式と呼ぶことにする。2 つのノード式の差から作った 1 次式を、そのノードを結ぶエッジ (線分) で表すものとする。例えば図 2 のエッジ AB は、1 次式 (a) - (b) を意味する。エッジに対応する 1 次式を、エッジ式と呼ぶことにする。連立 1 次方程式は、例えば図 3 のように、グラフとして表される。図 3 は 5 個の 1 次式を表している。

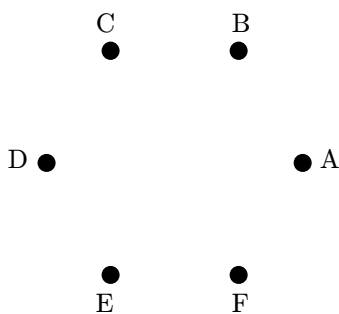


図 1: ノード (2 次式に相当)

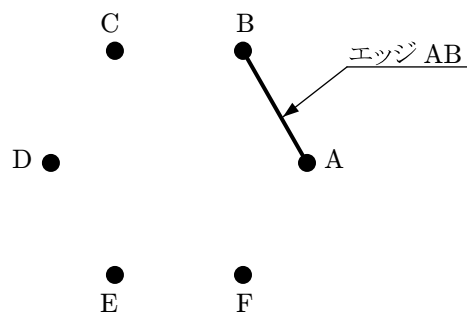


図 2: エッジ (1 次式に相当)

A.2 連立 1 次方程式の独立性とグラフのサイクル

前述のように連立 1 次方程式とグラフを対応させると、次のことが言える。

連立 1 次方程式が独立であるための必要十分条件は、グラフがサイクルを含まないことである。

サイクルとは閉じた経路のことで、閉道ともいう³。図 3 は独立な連立 1 次方程式を表すグラフの一例である。これに対して、図 4 はサイクル B-C-E-B を含むので独立ではない (従属な式を含む)。連立 1 次方程式の独立性とグラフのサイクルとの関係は、以下のようにして導かれる。

³サイクルと似た用語にループがあるが、両者は別物である。あるノードとそのノード自身とを結ぶ (1 本の) エッジのことをループという。

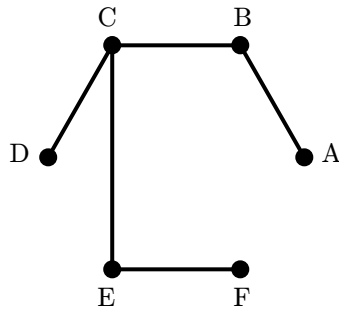


図 3: サイクルを含まないグラフ
(独立な連立 1 次方程式)

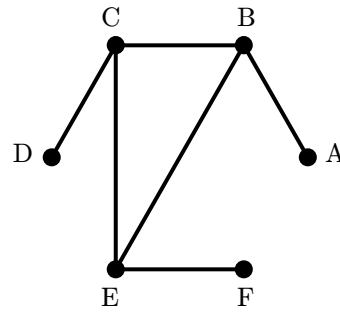


図 4: サイクルを含むグラフ (従属
な式を含む)

必要条件

図 5 のグラフには、2 つのエッジ式 (a) – (b) と (b) – (c) が存在する。この 2 つの式から、次の計算により 1 次式 (a) – (c) を作ることができる。

$$\begin{array}{r} (a) - (b) \\ +) (b) - (c) \\ \hline (a) - (c) \end{array}$$

したがって、図 5 にエッジ AC を追加した図 6 の状態は、従属な式を含んでいることになる。この考え方を一般化すると、「グラフがサイクルを含むならば、エッジ式は従属な式を含む」ことが導かれる。

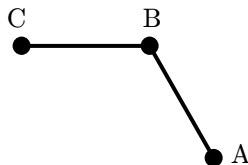


図 5: 独立なエッジ式

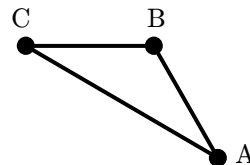


図 6: 従属なエッジ式

十分条件

一方、「グラフがサイクルを含まなければ、エッジ式は独立である」ことは、以下のように説明できる。サイクルを含まないグラフから 1 本のエッジを取り除くと、グラフは 2 つの部分 (部分グラフ) G_1 と G_2 に分かれる。例えば、図 3 のグラフからエッジ CE を取り除くと、図 7 のように $G_1 = \{\{A,B,C,D\},\{AB,BC,CD\}\}$ と $G_2 = \{\{E,F\},\{EF\}\}$ に分かれる。この図 7 の 4 つのエッジ式から、新たにエッジ式 (c) – (e) が作れるかどうかを考える。(c) を含むエッジ式を作ると、例えば (c) – (a) のように、必ず G_1 の他のノードのノード式を含んだものになる。同様に、(e) を含むエッジ式は必ず G_2 の他のノードのノード式を含んでいる。 G_1, G_2 に共通するノードは存在しないので、(c) と (e) の両方を含む 1 次式を作れば、例えば (c) – (e) – (a) + (f) のように、必ず (c),(e) 以外の項が消えずに残ってしまう。したがって、図 7 の状態からエッジ式 (c) – (e) を作る

ことはできない。よって、図 3 のグラフにおいてエッジ式 (c) – (e) は独立である。同様の理由により、図 3 において、エッジ式 (b) – (c) も独立である。

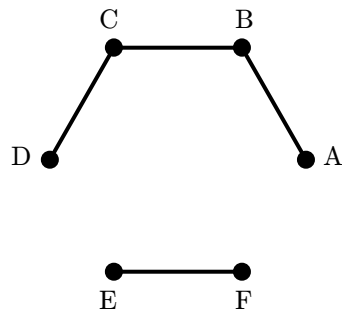


図 7: 2つの部分グラフ

また、図 3 のエッジ式 (a) – (b) が独立であることは、次のように説明される。このグラフからエッジ AB を取り除くと、残る部分グラフ G_1, G_2 のうち一方は、ノード A のみ (エッジを持たない) となる。式 (a) を含むエッジ式が存在しないので、既存のエッジ式からエッジ式 (a) – (b) を作ることはできない。したがって、図 3 のグラフにおいて、エッジ式 (a) – (b) は独立である。同様の理由により、図 3 においてエッジ式 (c) – (d), (e) – (f) も独立である。

以上の考え方を一般化すると、「グラフがサイクルを含まなければ、エッジ式は独立である」ことが導かれる。

A.3 木 (tree) 構造と 1 次式の数

サイクルを含まないグラフは、(1 本以上の) 木 (tree) 構造になる。また、2 本の木を 1 本のエッジで繋ぐと 1 本の木になる。したがって、与えられたノードを使って、サイクルを含まない、エッジ数が最大のグラフを作ると、1 本の木になる。

木においては、エッジの数はノードの数より 1 少ないことが知られている。以上のことから、ノード数が 6 個の場合、独立な 1 次式は 5 個まで作れることになる。

参考文献

- [1] Lai, Alan; James, Daniel A.; Hayes, Jason P.; Harvey, Erol C. *Semi-automatic calibration technique using six inertial frames of reference*. Proceedings of SPIE, Vol.5274, pp.531-542, 2004.
- [2] 旭化成エレクトロニクス (株). 山田 力大, 疋田 浩一, 佐々木 裕之, 山下 昌哉 『加速度計測装置』再公表特許 国際公開番号 WO2006/016671 (2006-02-16)